JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Eingereicht von
Sarah Starlinger

Angefertigt am
Institut für Finanzmathematik und angewandte Zahlentheorie

Beurteiler
A. Univ.-Prof. Dr. Friedrich Pillichshammer

April 2017

Der Gregorianische Kalender und die Gauß'sche Osterformel

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften

im Diplomstudium

Lehramt Mathematik und Physik

JOHANNES KEPLER UNIVERSITÄT LINZ
Altenbergerstraße 69
4040 Linz, Österreich
www.jku.at
DVR 0093696

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die vorliegende Diplomarbeit ist mit dem elektronisch Übermittelten Textdokument identisch.

. . . .

Sarah Starlinger

Danksagung

Als erstes möchte ich meinem Diplomarbeitsbetreuer Herrn A.Univ.-Prof. Dr. Friedrich Pillichshammer ein großes Dankeschön aussprechen. Er betreute mich bestens beim Verfassen meiner Diplomarbeit und stand mir immer mit Verbesserungsvorschlägen zur Seite.

Der größte Dank geht an meine Familie, besonders an meine Eltern, die immer an mich geglaubt und mich stets motiviert haben. Ohne ihre finanzielle und emotionale Unterstützung wäre ein Studieren in dieser Weise nicht möglich gewesen.

Ein besonderer Dank gilt meinen Studienkollegen Lukas Kehrer und David Dorn, ohne diese beiden wäre das Studium nur halb so lustig gewesen und ich hätte vermutlich noch einige Semester länger gebraucht.

Auch bei meinen anderen Studienkollegen, Andrea Stiglbauer, Martina Hackl, Julia Hülmbauer, Magdalena Freudenthaler, Johanna Zöchbauer, Marius Reiter, Christopher Spernbauer, Lukas Rechberger, David Miniberger, Benjamin Gmeiner, Michael Holzmann und Daniel Mitgutsch möchte ich mich für ihre Unterstützung bedanken.

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit dem Thema Kalender. Im ersten Teil der Arbeit wird auf die geschichtliche Entwicklung der Kalendersysteme eingegangen und es wird erklärt wie ein Kalender entsteht. Die Grundlagen eines Kalenders basieren auf den drei astronomisch auftretenden Naturerscheinungen, dem Wechsel zwischen Tag und Nacht, dem Umlauf der Erde um die Sonne und der Mondbewegung. Damit ein Kalender entstehen kann, müssen diese Naturereignisse sinnvoll verknüpft werden. Im ersten Moment klingt das sehr einfach, doch eine Vielzahl an Astronomen und Mathematiker beschäftigten sich lange Zeit mit der Entwicklung eines solchen Kalendersystems. Es gelang ihnen letzten Endes, den bei uns heute gültigen Gregorianischen Kalender aufzustellen. Der Gregorianische Kalender geht auf den Julianischen Kalender zurück. Im Jahr 1582 wurde der Julianische Kalender durch Papst Gregor XIII. reformiert. Einer der Reformgründe war das zunehmend falsche Osterdatum. Das Osterfest spielt somit eine große Rolle in der Kalendergeschichte.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Gauß'schen Osterformel und der dazugehörigen Mathematik. Die sogenannte Gauß'sche Osterformel wurde erstmals 1800 von Carl Friedrich Gauß veröffentlicht. Mit dieser Formel lässt sich das Datum des Osterfestes für ein beliebiges Jahr bestimmen. Um die Osterformel verstehen zu können, muss man sich zuerst mit den Grundlagen eines Kalenders und den notwendigen mathematischen Hilfsmitteln, wie Teilbarkeit, Kongruenzen, Restklassen und Kettenbrüche, auseinandersetzten.

Im letzten Kapitel findet man Anregungen, wie das Thema Kalenderberechnungen im Unterricht der Sekundarstufe I bzw. II angewendet werden kann.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„Hoc vero, quod nimirum exigit legitimam Calendarii restitutionem, iam diu a Romanis Pontificibus prædecessoribus nostris, et sæpius tentatum est, verum absolvi, et ad exitum perduci ad hoc usque tempus non potuit; quod rationes emendandi Calendarii, quæa cœlestium motuum peritis proponebantur, propter magnas, et fere inextricabiles difficultates, quas huiusmodi emendatio semper habuit, neque perennes erant, neque antiquos Ecclesiasticos ritus incolumes (quod in primis hac in re curandum erat) servabant.“

„Die zweite aber, die nun die rechtliche Wiederherstellung des Kalenders verlangt, ist schon zu wiederholten Malen von unserer Vorgängern im Amt des römischen Pontifex in Angriff genommen worden, sie konnte aber bis zum heutigen Tage nicht vollendet und zum Abschluss gebracht werden, da die Berechnungen zur Verbesserung des Kalenders, die von denen, die sich auf die Bewegung des Himmels verstehen, vorgeschlagen wurden, abgesehen von den großen und nahezu unentwirrbaren Schwierigkeiten, die immer einer derartigen Korrektur innewohnen werden, weder dauerhaft waren, noch die alten kirchlichen Riten (was zu allererst hierbei zu beachten war) unversehrt ließen.“

(Päpstliche Bulle „Inter gravissimas“, §4 (vgl. [1]))

Am 24. Februar 1582 verkündete Papst Gregor XIII. mit seiner Bulle „Inter gravissimas“ die neue Ordnung des Kalenders. Dieses Dokument ist wohl eines der wichtigsten in Bezug auf unseren heutigen sogenannten Gregorianischen Kalender.

Es gibt viele verschiedene Kalenderarten, wie zum Beispiel Mondkalender, Solarkalender oder Lunisolarkalender, aber auch ägyptische Kalender und Maya-Kalender. Die ersten Kalender gab es womöglich schon etwa 4000 v. Chr. Man stellt sich nun aber die Frage, wie ein Kalendersystem überhaupt entsteht und was alles dahinter steckt. Ein Kalender bietet offensichtlich eine Übersicht von Tagen, Wochen, Monaten und Jahren. Jeder weiß, dass ein Tag aus 24 Stunden besteht, eine Woche aus sieben Tagen, ein Monat aus entweder 30 oder 31 Tagen, ausgenommen der Februar und ein Jahr besteht aus entweder 365 oder 366 Tagen, je nachdem ob wir uns in einem Schaltjahr befinden oder nicht. Doch warum müssen wir manchmal einen Schalttag im Februar einlegen und auf welchem System beruht diese Schaltung?

Ein Kalender basiert auf den astronomisch auftretenden Naturerscheinungen. Zum einen gibt es die Rotation der Erde um die eigene Achse welche den Wechsel zwischen Tag und Nacht hervorruft. Zum anderen den Umlauf der Erde um die Sonne, welcher für die Jahreszeiten verantwortlich ist und dann gibt es noch den Umlauf des Mondes um die Erde. Diese drei Naturerscheinungen müssen sinnvoll verbunden werden, um einen Kalender aufstellen zu können und gehören damit zu den Grundlagen eines Kalenders. Dies klingt im ersten Moment sehr einfach, doch leider dauert ein astronomisches Jahr nicht genau 365 Tage, sondern musste angenähert werden. Der heute bei uns gültige Gregorianische Kalender geht auf den Julianischen Kalender zurück und basiert auf einer langen Geschichte. Viele Astronomen und Mathematiker beschäftigten sich jahrelang mit den Kalendersystemen und stellten letztendlich einen sehr guten Kalender auf, welcher mit den Zyklen der Naturerscheinungen möglichst exakt übereinstimmt. Einer der wichtigsten Gründe warum der Julianischen Kalender reformiert wurde, war das zunehmend falsche Osterdatum. Das Osterfest spielt somit eine große Rolle im Bezug auf den Kalender.

In folgender Arbeit wird also im Speziellen darauf eingegangen, wie ein Kalender entsteht und welche Mathematik sich dahinter versteckt. Außerdem wird die bekannte Gauß'sche Osterformel ausgearbeitet, um das Osterdatum eines beliebigen Jahres genau berechnen zu können. Dazu werden einige mathematische Hilfsmittel notwendig sein, wie Teilbarkeit, das Rechnen mit Restklassen und Kettenbrüche. Im letzten Kapitel gibt es Anregungen, wie das Thema Kalenderberechnung auch im Unterricht der Sekundarstufe I bzw. II eingesetzt werden kann.

2 Die Grundlagen eines Kalenders

„*Du hast den Mond gemacht, um die Zeit zu teilen;*
die Sonne weiß, wann sie untergehen muss."
(Psalm 104,19)

Ein Leben ohne Kalender wäre im 21. Jahrhundert nicht mehr vorstellbar. Wichtige Geschäftstermine müssen eingehalten werden, Geburtstage enger Freunde sollten nicht vergessen werden aber auch Schulferien und Urlaubstage sollten rechtzeitig bekannt sein. Doch wie ist man eigentlich zu unserem heute bekannten Gregorianischen Kalender gekommen und was steckt dahinter? Tag und Nacht, genauso wie Frühling, Sommer, Herbst und Winter, prägen den Rhythmus des menschlichen Lebens, welcher unmittelbar von der Sonne abhängt. Aber nicht nur die Sonne, sondern auch die verschiedenen Mondphasen spielen eine große Rolle beim Berechnen eines Kalenders. Die Grundlagen für einen Kalender setzen sich folglich aus den drei regelmäßig auftretenden Naturerscheinungen zusammen:

- Der Wechsel von Tag und Nacht;
- der Zyklus der Jahreszeiten;
- die Mondphasen.

In diesem Kapitel werden wir uns also den drei wesentlichen Naturerscheinungen widmen, um verstehen zu können, wie ein Kalender entsteht. Es gibt natürlich auch verschiedene Arten von Kalendern, auf die kurz eingegangen wird.

Die Literatur wurde für Kapitel 2 und 3 hauptsächlich aus zwei verschiedenen Büchern entnommen. Ausgenommen sind jene Absätze, welche extra zitiert wurden. Das erste Buch heißt „Die Gregorianische Kalenderreform von 1582 - Korrektur der christlichen Zeitrechnung in der Frühen Neuzeit" von Dirk Steinmetz (siehe [2]). Das zweite Buch ist der „Dtv-Atlas zur Astronomie - Tafeln und Texte" von Joachim Herrmann (siehe [3]).

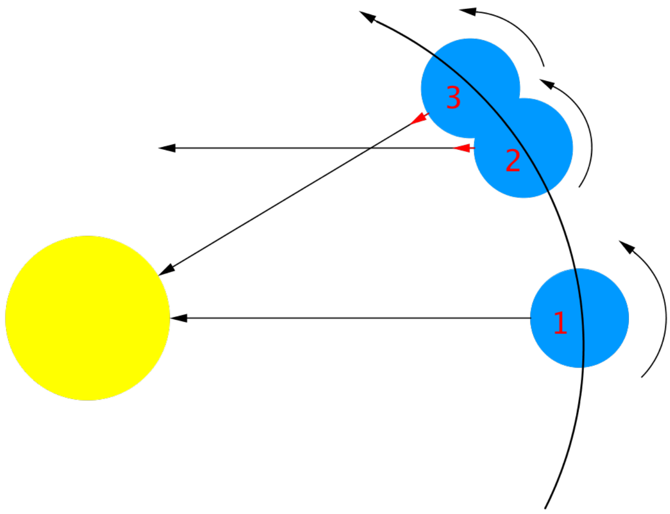

Abbildung 2.1: Siderischer Tag (von 1 nach 2) und Sonnentag (von 1 nach 3) im Vergleich

2.1 Der Wechsel von Tag und Nacht

Der Wechsel von Tag und Nacht entsteht durch die Rotation der Erde um die eigene Achse. Die durchschnittliche Dauer einer Umdrehung beträgt 23 Stunden 56 Minuten 4,10 Sekunden und wird als *siderischer Tag* bezeichnet. Die Erde rotiert aber nicht nur um ihre eigene Achse, sondern kreist auch langsam um die Sonne. Während die Erde sich einmal um sich selbst dreht, wandert sie gleichzeitig auch ein kleines Stück auf der Sonnenumlaufbahn weiter. Dieses Stück muss sie sich noch weiterdrehen, damit die Sonne wieder genau über dem selben Ort steht (siehe Abbildung 2.1). Dazu braucht sie im Durchschnitt vier Minuten. Der sogenannte *Sonnentag* dauert somit im Mittel 24 Stunden und ist um vier Minuten länger als der siderische Tag.

2.2 Der Zyklus der Jahreszeiten

Die Jahreszeiten entstehen durch den Umlauf der Erde, auf einer elliptischen Bahn, um die Sonne. Da der Neigungswinkel der Erdachse nicht rechtwinkelig ist, sondern um 23°27’ gegen den Erdäquator geneigt ist, verändert sich die Einstrahlung des Sonnenlichts in den verschiedenen Gebieten der Erde. Diese jährliche scheinbare Sonnenbahn wird auch Ekliptik genannt. Die Ekliptik schneidet den Himmelsäquator an zwei Punkten, dem Frühlingspunkt (Tag-und-Nachtgleiche oder Frühlingsäquinoktium) und dem Herbstpunkt (siehe Abbildung 2.2). Die Sonne erscheint dort also am Frühlingsanfang (21. März) bzw. am Herbstanfang (23. September) für die Nordhalbkugel der Erde.

Die Länge eines solchen Zyklus heißt *tropisches Jahr* und wird zum Beispiel von einer Frühlings-Tag-und-Nachtgleiche zur nächsten gemessen. Im Jahr 2010 betrug ein tropisches Jahr 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und 45,41 Sekunden. Zusätzlich zum tropischen Jahr gibt es auch das *siderische Jahr*. Dieses beschreibt die Umlaufzeit der Erde um die Sonne mit den Fixsternen als Bezugspunkt. Dies ist also die Zeit, die vergeht, bis die Sonne wieder dieselbe Lage gegenüber den Fixsternen eingenommen hat. Aufgrund der Präzession ist das siderische Jahr um 0,014168 Tage länger als das tropische Jahr.

Da die Erde keine Kugel ist, sondern durch die Abplattung ein Rotationsellipsoid und der Erdäquator geneigt ist, üben Sonne und Mond ein Drehmoment aus. Dieses Drehmoment versucht die Erdachse wieder aufzurichten. Die Erde dreht sich aber auch um die eigene Achse und stellt damit einen Kreisel dar. Dies führt dazu, dass die Erdachse eine kegelartige Bahn um eine Achse, die rechtwinkelig zur Ekliptikebene steht, umläuft. Diese Achsenverlagerung, durch ein von außen einwirkendes Drehmoment auf einen Kreisel, nennt man Präzession.

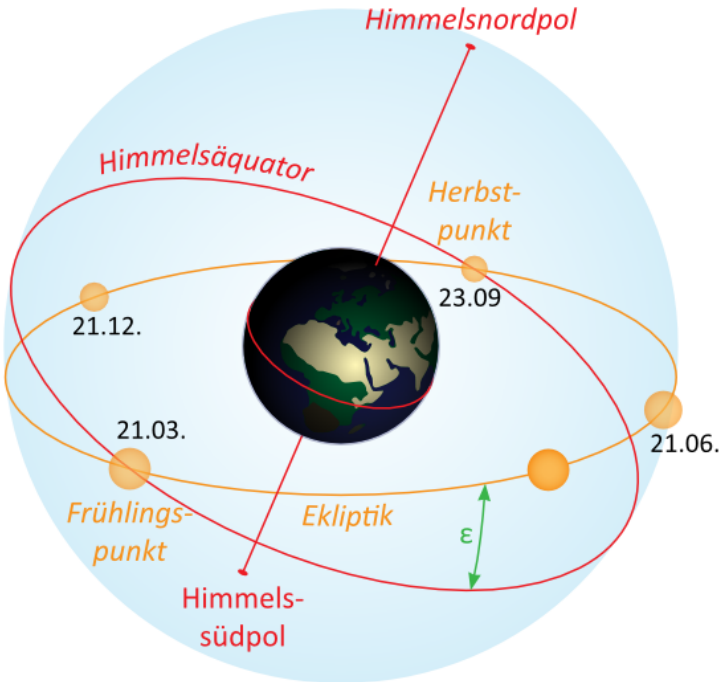

Abbildung 2.2: Sonnenumlaufbahn und Frühlingspunkt (aus [4])

2.3 Die Mondphasen

Die Mondphasen entstehen durch den Umlauf des Mondes auf einer elliptischen Bahn um die Erde. Unsere Monate Januar, Februar, März usw. sind von den Mondphasen völlig unabhängig. In der Astronomie hingegen wird die Umlaufzeit des Mondes nach wie vor *Monat* genannt, wobei eigentlich immer die Rede von den *Mondmonaten* ist. Man unterscheidet wieder zwischen *siderischem Monat* und *synodischem Monat*.

Die Umlaufzeit des Mondes wird synodischer Monat genannt und beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten und 2,9 Sekunden. Die Zeitspanne wird zwischen zwei gleichartigen Mondphasen, z.B. von Neumond zu Neumond, gemessen. Der siderische Monat bezeichnet die Umlaufzeit des Mondes um die Erde in Bezug auf die Sterne. Dies ist also die Zeit, die verstreicht, bis der Mond wieder dieselbe Stellung gegenüber den Sternen einnimmt und beträgt 27 Tage 7 Stunden 43 Minuten und 11,6 Sekunden. Der siderische Monat ist somit um über 2 Tage kürzer als der synodische Monat. Der Unterschied zwischen siderischem und synodischem Monat ist deutlich in Abbildung 2.3 zu sehen.

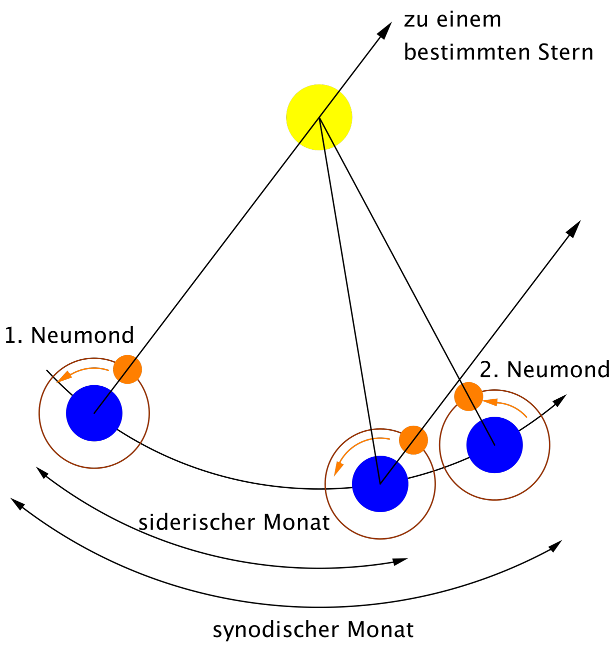

Abbildung 2.3: Siderischer Monat im Vergleich zum Synodischen Monat

Um einen Kalender erstellen zu können, müssen also die Zyklen der wiederkehrenden Naturerscheinungen sinnvoll verknüpft werden. Dies klingt im ersten Moment sehr einfach, doch beim Versuch die Perioden der beschriebenen Zyklen zu vereinen, stößt man auf ein großes Problem, welches viele Mathematiker, Physiker und Astronomen seit langem beschäftigt. Wie wir bereits gesehen haben, sind die Längen von Tag, Mondphasen und Jahr keine Vielfachen voneinander. Ein Jahr ist zum Beispiel nicht durch eine ganze Anzahl von Tagen darstellbar. Um trotzdem einen sinnvollen Kalender erstellen zu können, müssen mindestens zwei der bereits erwähnten Zyklen durch ganzzahlige Näherungswerte angepasst werden.

Es gibt drei verschiedene Arten von Kalender:

- Den *Sonnenkalender* oder auch *Solarkalender*, welcher Tag und Jahr in Übereinstimmung bringt.
- Der *(freie) Mondkalender* verknüpft den Tag mit dem Monat.
- Der *gebundene Mondkalender*, auch *Lunisolarkalender* genannt, stimmt das Jahr und den Lauf des Mondes mit der Tageslänge ab.

Unsere Kalender zählen zu den Sonnenkalendern, weil keine Rücksicht auf die Mondphasen genommen wird. Der Sonnenkalender bezieht sich hauptsächlich auf das tropische Jahr. Der Ursprung unserer heutigen Monate liegt zwar in den Mondphasen, aber der Monatsbeginn ist nicht auf eine bestimmte Mondphase abgestimmt. Wie wir aber später noch sehen werden, spielt der Mond trotzdem eine wichtige Rolle in unserem Kalender, da er zum Beispiel das Datum des Osterfestes festlegt. Zunächst widmen wir uns der Geschichte des Gregorianischen Kalenders, also welcher Kalender davor gültig war, warum dieser reformiert wurde und welche Auswirkungen dies auf das Osterfest hatte.

3 Geschichte des Gregorianischen Kalenders

Schon etwa 4000 v. Chr. gab es die ersten Kalender, welche aus den frühen Hochkulturen Ägyptens und Mesopotamiens stammen. Diese Kalender bilden die Basis unserer heutigen Kalendersysteme. Der Begriff „Kalender“ stammt vom lateinischen Verb „calare“ und bedeutet so viel wie rufen, ausrufen oder ankündigen. In der antiken Mittelmeerwelt gab es den Brauch, dass Priester den Monatsbeginn, wenn also nach dem Neumond die schmale Mondsichel am Himmel sichtbar war, öffentlich ankündigen. An diesem Tag wurden zum Beispiel fällige Verpflichtungen in das „calendarium“ (Schuldbuch) eingetragen.

3.1 Der Julianische Kalender

Unser heute gültiger *Gregorianischer Kalender* geht auf den *Julianischen Kalender* zurück, welcher von Julius Cäsar (100 v. Chr. - 44 v. Chr.) (vgl. [5]) am 1. Januar 45 v. Chr. eingeführt und auch nach ihm benannt wurde. Julius Cäsar setzte mit Hilfe verschiedener Philosophen und Mathematiker sowie dem Astronom Sosigenes von Alexandria, dem Kalenderchaos der späten römischen Republik ein Ende.

Der *römische Kalender* geht nach der römischen Mythologie auf die Sage von Romulus und Remus, den Stadtgründern Roms, zurück. Der Kalender bestand aus einem Mondjahr von 355 Tagen, welches in 12 Monate aufgeteilt war. Vier Monate (Martius, Maius, Quintilis und October) zu 31 Tagen und sieben Monate (Ianuarius, Aprilis, Iunius, Sextilis, September, November und December) zu 29 Tagen sowie Februarius zu 28 Tagen. Wegen der Anpassung an die Jahreszeiten, fügte man alle zwei Jahre, nach dem Fest der Terminalia[1] am 23. Februar, einen Schaltmonat von 23 bzw. 22 Tagen ein. Sie wurden Mercedonius genannt, was soviel wie Lohnmonat heißt, da in diesem Monat unter anderem die Arbeitskräfte ausbezahlt wurden [6].

Dieser Vierjahreszyklus ergab ein durchschnittliches Jahr von 366,25 Tagen. Da die Schaltmonate willkürlich eingefügt wurden, entstand rasch ein Chaos und Cäsar hielt es für notwendig den Kalender zu reformieren. Im Jahr 46. v. Chr. wurden deshalb 90 Tage eingeschaltet, 23 Tage als Schaltmonat nach dem 23. Februar und 67 Tage zwischen November und Dezem-

[1] Die Terminalia wurden zu Ehren des römischen Gottes Terminus gefeiert.

ber. Dieses Jahr mit 445 Tagen gilt als das längste Jahr in der Geschichte des Kalenders und wird auch „annus confusionis“ genannt.

Da das tropische Jahr ungefähr 365 Tage und 6 Stunden hat bzw. 365,25 Tage, wurde das *Gemeinjahr* auf 365 Tage festgelegt. Das Gemeinjahr ist somit um etwa 1/4 Tag kürzer als das tropische Jahr und es liegt nahe, alle vier Jahre, nach dem 23. Februar, einen Schalttag einzuführen. Die durchschnittliche Jahreslänge eines *julianischen Jahres* betrug somit $365 + \frac{1}{4}$ Tage. Die Monate hatten abwechselnd 31 oder 30 Tage und der Februar eines Gemeinjahres 29 Tage.

Monat	**# Tage**	**Monat**	**# Tage**	**Monat**	**# Tage**
Ianuarius	31	Maius	31	September	31
Februarius	29 (30)	Iunius	30	October	30
Martius	31	Quintilis / Iulius	31	November	31
Aprilis	30	Sextilis	30	December	30

Tabelle 3.1: Monatsnamen und -längen des Julianischen Kalenders im Zeitraum 45 v. Chr. bis 8 v. Chr.

Nachdem Cäsar ermordet wurde, benannte man ihm zu Ehren den Monat Quinitilis zu Iulius um. Im Jahre 8 v. Chr. wurden noch einmal, nach einigen unregelmäßigen Schaltungen, kleine Änderungen unter Augustus durchgeführt. Demnach wurde der Monat Sextilis zu Ehren des Kaisers in Augustus umbenannt und um einen Tag verlängert. Die Monatslängen wurden folgendermaßen abgeändert:

Monat	**# Tage**	**Monat**	**# Tage**	**Monat**	**# Tage**
Ianuarius	31	Maius	31	September	30
Februarius	28 (29)	Iunius	30	October	31
Martius	31	Iulius	31	November	30
Aprilis	30	Augustus	31	December	31

Tabelle 3.2: Monatsnamen und -längen des Julianischen Kalenders seit 8 v. Chr.

Der Julianische Kalender wurde 1582 von Papst Gregor XIII. (1502 - 1585) (vgl. [7]) reformiert. Es gibt verschiedene Gründe für die gregorianische Kalenderreform, welche später noch genauer erläutert werden. Ein wichtiger Grund war mitunter das zunehmend falsche Datum des christlichen Osterfestes.

3.2 Das Osterfest

Das Osterfest geht auf die Leidensgeschichte Jesu Christi zurück, welche sich in der Passahwoche ereignete. Das Passahfest, oder auch Pessach, ist eines der wichtigsten Feste im Judentum. Das letzte Abendmahl feierte Jesu Christi mit seinen 12 Aposteln, nach den Evangelien von Matthäus, Markus und Lukas am Vorabend des Passahfestes. Am darauf folgenden Tag erfolgte die Kreuzigung und der Tod Jesu, welcher nach allen vier Evangelisten ein Freitag war. Die Auferstehung fand am übernächsten Morgen, also am Sonntag, statt. Am Ostersonntag wird also jährlich die Auferstehung Jesu Christi gefeiert. Die Christen feierten somit die Auferstehung Christi gemeinsam mit dem jüdischen Passahfest. Da die Christen, in Bezug auf das Osterfest, von den Juden abhängig waren, wurde sehr bald beschlossen, Ostern als eigenständiges Fest zu feiern. Demzufolge wurde ab dem 3. Jahrhundert n. Chr. ein Zyklus zur eigenständigen Vorausbestimmung des Osterfestes entwickelt. Da das Passahfest durch astronomische Erscheinungen festgelegt ist, sollte auch das Osterfest an Mondlauf und Frühling gebunden bleiben. Beim Übereinstimmen der auf Mond- und Sonnenbewegung beruhenden Kalendergrößen entstanden verschiedene Osterzyklen, wobei sich nur ein Zyklus durchgesetzt hat.

3.2.1 Die verschiedenen Osterzyklen

Um einen genauen Zyklus erstellen zu können, müssen gemeinsame Vielfache der Längen des synodischen Monats (29,53 Tage) und des julianischen Jahres (365,25 Tage) gesucht werden. Man versuchte also die synodischen Monate und die julianischen Jahre durch einen Zyklus zu verbinden. Dabei entstanden an verschiedenen Orten und Zeiten unterschiedliche Osterzyklen. Dies führte unter anderem zu einem Streit zwischen den Christen, worauf das Konzil von Nicäa einberufen wurde. Der sogenannte *Metonische Zyklus* hat sich ab dem fünften Jahrhundert durchgesetzt und wird heute noch angewendet. Folgende Tabelle soll eine Übersicht der verschiedenen Osterzyklen bieten. Wir bezeichnen hier ein Julianisches Jahr mit a, ein synodisches Monat mit m und einen Tag mit d.

Bezeichnung	**Zykluslänge**	**Abweichung pro Zyklus zur wahren Mondbewegung**	**Abweichung entspricht einem ganzen Tag in**
Oktaëteris	8a $\approx$ 99m	1,528d	5a 86d
doppelte Oktaëteris	16a $\approx$ 198m	3,057d	5a 86d
11-jährige Periode	11a $\approx$ 136m	1,590d	6a 335d
84-jährige Periode	84a $\approx$ 1039m	1,282d	65a 191d
Metonischer Zyklus	19a $\approx$ 235m	0,062d	308a 189d

Tabelle 3.3: Verschiedene Osterzyklen in frühchristlicher Zeit

Die ersten drei Zyklen, Oktaëteris, doppelte Oktaëteris und die 11-jährige Periode, sind sehr ungenau und waren nur im 3. Jahrhundert in der Alexandrinischen Kirche in Gebrauch. Die 84-jährige Periode ist um einiges genauer als die ersten drei und hat einen Vorteil gegenüber dem Metonischen Zyklus. Sie umfasst genau drei Sonnenzyklen zu 28 Jahren, also nach 84 Jahren wiederholt sich nicht nur der Ostervollmond, sondern auch das Datum des Osterfestes. Dieser Zyklus war bei den Römern im 2. Jahrhundert weit verbreitet. Der Metonische Zyklus ist mit einer Abweichung von weniger als zwei Stunden in 19 Jahren sehr genau. Das Datum des Osterfestes wiederholt sich erst nach 532 Jahren. Dieser Zyklus setzte sich durch und ist mittlerweile in ganz Europa in Gebrauch.

3.2.2 Das Konzil von Nicäa

Das erste ökumenische Konzil von Nicäa wurde 325 n. Chr. vom römischen Kaiser Konstantin I. in Nicäa einberufen, um den Streit in Alexandria über den Arianismus[2] zu schlichten. Auch das ungelöste Problem um das Osterdatum stand zur Debatte. Die teilnehmenden Bischöfe aus dem Osten unterschrieben unter anderem das nicäische Glaubensbekenntnis, stimmten über weitere Fragen über die Kirche ab und diskutierten über das Osterfest. Leider gibt es von diesem Konzil keine offiziell überlieferten Schriften, aber es wurde vermutlich beschlossen, dass das Osterfest von allen und an jedem Ort, am gleichen Tag, gefeiert werden sollte. Es ist ungewiss, ob auch bestimmt wurde, dass der Ostertermin auf den Sonntag nach Vollmond, am oder unmittelbar nach dem Tag des Frühlingsäquinoktiums fallen und mit Hilfe des 19-jährigen Metonischen Zyklus berechnet werden sollte.
Erst Beda Venerabilis (~673-735 n. Chr.), ein angelsächsischer Benediktinermönch, schrieb 725 n. Chr. in seinem umfassenden Werk „De Temporum ratione“ ausführlich über die Be-

[2] Der Arianismus war eine frühe, christliche, theologische Lehre des Arius aus dem 4. Jahrhundert.

rechnung des Osterdatums.

3.2.3 Berechnung des Osterdatums vor der Kalenderreform

Im Julianischen Kalender dauert der Sonnenzyklus 28 Jahre, das heißt nach 28 Jahren fallen die Wochentage wieder auf die gleichen Monatsdaten. Mit Hilfe des 28-jährigen Sonnenzyklus und 19-jährigen Mondzyklus, konnten die Ostersonntage des daraus resultierenden 532-jährigen *Großen Osterzyklus*, für alle Jahre berechnet werden. Die Dauer des Osterzyklus ergibt sich aus der Multiplikation der Längen von Sonnen- und Mondzyklus. Da 28 und 19 teilerfremd sind, gilt $\mathrm{kgV}(28, 19) = 28 \cdot 19 = 532$. Beda schrieb in seinem Werk die Anweisungen zur Bestimmung des Osterdatums nieder und legte fest, dass Ostern am Sonntag nach dem Vollmond (Frühlingsvollmond) gefeiert wird, welcher am oder unmittelbar nach dem Tag des Frühlingsäquinoktiums eintritt. Der Frühlingsbeginn bzw. das Frühlingsäquinoktium wurde auf den 21. März festgelegt. Die restlichen Größen, welche zum Berechnen des Osterfestes benötigt werden, müssen durch den Sonnen- bzw. Mondzyklus bestimmt werden.

3.2.4 Der Sonnenzyklus

Wie oben bereits erwähnt, dauert der Sonnenzyklus 28 Jahre, dies hängt mit der Anzahl der Wochentage und der Schaltjahre zusammen. Nach jeweils sieben Tagen beginnt wieder eine neue Woche. Ist zum Beispiel der 1. März ein Mittwoch, dann fällt er im folgenden Jahr auf einen Donnerstag, im übernächsten auf einen Freitag usw. Liegt jedoch ein Schalttag dazwischen, wird ein Tag übersprungen. Der 1. März wäre zwar nach fünf, sechs oder elf Jahren wieder ein Mittwoch, doch wegen der Schaltregel dauert es 28 Jahre bis alle Tage wieder auf den gleichen Wochentag fallen. Die Dauer von 28 Jahren ergibt sich also aus dem Produkt von 7 (Anzahl der Wochentage) und 4 (jedes vierte Jahr ist ein Schaltjahr). Um möglichst schnell den Wochentag eines beliebigen Datums bestimmen zu können, hat man damals den *Sonnenzirkel*, *Tagesbuchstaben* und *Sonntagsbuchstaben* eingeführt. Der Sonnenzirkel dient dazu, die Jahre innerhalb eines 28-jährigen Zyklus voneinander zu unterscheiden. Die Jahre wurden deshalb mit den römischen Zahlen I, II, …, XXVIII nummeriert. Für das Jahr I eines beliebigen Sonnenzyklus hatte man das Jahr 9 v. Chr. bestimmt, da dieses Schaltjahr mit einem Montag begann. Der sogenannte Sonnenzirkel SZ eines Jahres j lässt sich also wie folgt berechnen:

$$SZ = (j + 9) \mod 28$$

Es ist zu beachten, dass bei Rest 0 der Sonnenzirkel $SZ = 28$ zu setzen ist. Zusätzlich zum Sonnenzirkel wurden auch noch die Tagesbuchstaben vergeben. Die Tage eines Jahres, angefangen beim 1. Jänner, wurden mit den Buchstaben $A, B, \dots, G$ durchnummeriert. Um den Tagesbuchstaben eines Datums herausfinden zu können, genügt es, die Tagesbuchstaben der Monatsanfänge zu kennen:

1. Jänner A,	1. Februar D,	1. März D,	1. April G,
1. Mai B,	1. Juni E,	1. Juli G,	1. August C,
1. September F,	1. Oktober A,	1. November D,	1. Dezember F.

Anhand dieser Tabelle lässt sich sofort feststellen, dass z.B. der 17. Mai und der 6. Dezember immer auf den gleichen Wochentag fallen, da sie den Tagesbuchstaben D haben. Um aber nun den genauen Wochentag eines Datums bestimmen zu können, benötigte man noch den sogenannten Sonntagsbuchstabe. Der Sonntagsbuchstabe eines Jahres hat den Buchstaben des ersten Sonntages im Jänner. Das Jahr 2015 hat zum Beispiel den Sonntagsbuchstaben D, da der 4. Jänner der erste Sonntag im Jahr war und den Tagesbuchstaben D besitzt. In einem Gemeinjahr sind dann alle Tage mit diesem Buchstabe Sonntage, im Schaltjahr müssen jedoch zwei Sonntagsbuchstaben vergeben werden. Der erste Sonntagsbuchstabe gilt bis zum 24. Februar (ein Tag vor dem Schalttag), ab dem 25. Februar fallen die Sonntage auf den Tagesbuchstaben vor dem ersten Sonntagsbuchstabe. Anhand folgender Tabelle kann der Zusammenhang zwischen Sonnenzirkel SZ und Sonntagsbuchstabe SB abgelesen werden.

SZ	SB	SZ	SB	SZ	SB	SZ	SB	SZ	SB	SZ	SB	SZ	SB
I	GF	V	BA	IX	DC	XII	FE	XVII	AG	XXI	CB	XXV	ED
II	E	VI	G	X	B	XIV	D	XVIII	F	XXII	A	XXVI	C
III	D	VII	F	XI	A	XV	C	XIX	E	XXIII	G	XXVII	B
IV	C	VIII	E	XII	G	XVI	B	XX	D	XXIV	F	XXVIII	A

Tabelle 3.4: Sonnenzirkel und Sonntagsbuchstaben

Nun werden wir mit Hilfe des Sonntagsbuchstaben und Sonnenzirkels, anhand eines Beispiels, den Wochentag eines beliebigen Datums bestimmen. Wir suchen den Wochentag des 24. Februar 1582, der Tag an dem die neue Ordnung des Kalenders verkündet wurde. Der Sonnenzirkel des Jahres 1582 ist $SZ = (1582 + 9) \mod 28 = 23$, also XXIII. Laut obiger Tabelle (3.4) haben die Jahre mit dem Sonnenzirkel XXIII den Sonntagsbuchstabe G. Weiters hat der 24. Februar den Tagesbuchstaben F, was mit den Tagesbuchstaben der Monatsanfänge festgestellt werden kann. Der 24. Februar fällt somit auf den Tag vor dem Sonntag und muss ein Samstag gewesen sein. Heute ist natürlich schon eine Formel bekannt, mit der man die Wochentage eines beliebigen Datums bestimmen kann (siehe Kapitel 5.3).

3.2.5 Der Mondzyklus

Die wahre Mondbewegung wurde mit dem Metonischen Zyklus oder auch Mondzyklus angenähert und wiederholt sich alle 19 julianischen Jahre, was etwa 235 synodischen Monaten entspricht. Es müssen also $19 \times 365 = 6935$ Tage auf 235 Mondmonate aufgeteilt werden. Ein Mondmonat ist der Zeitraum, welcher von einem Neumond zum nächsten gemessen wird. Die Mondmonate erhalten abwechselnd 30 und 29 Tage, ausgehend vom ersten Neumond des ersten Jahres im Zyklus. Dementsprechend besteht ein Mondmonat im Mittel aus $(30 + 29)/2 = 29,5$ Tagen und weicht etwas vom synodischen Monat ab, welches aus ca. 29,53 Tagen besteht. Dies ist auch der Grund, warum gelegentlich ein (Mond-)Schaltmonat von 30 Tagen eingeschaltet werden musste. Der Beginn des 19-jährigen Zyklus war an einem 24. Dezember, an dem der Neumond stattfand. Dies war in den Jahren 2 v. Chr. und 531 n. Chr. der Fall. Das eine Woche später beginnende neue Jahr war aber das erste Jahr des Mondzyklus und hatte die Goldene Zahl $G = 1$. Die Goldene Zahl gibt die Nummer eines Jahres in einem 19-jährigen Metonischen Zyklus an, damit die Jahre unterschieden werden können. Wie die Goldene Zahl genau berechnet wird, steht im Kapitel 7.2.

Dementsprechend wurden die 235 Mondmonate folgendermaßen verteilt. Die Mondmonate wechseln sich, beginnend mit 30 Tagen und 29 Tagen, ab. Treten in einem Jahr 13 Neumonde auf, dann muss wie gesagt ein (Mond-)Schaltmonat von 30 Tagen eingeschaltet werden. Den Zeitpunkt der Einschaltung bestimmen die sogenannten Epakten. Die Epakte eines Jahres zeigt uns, um wie viele Tage der letzte Neumond vor Neujahr stattgefunden hat und gibt sozusagen das Alter des Mondes an. Ist die Epakte eines Jahres 14, fand der Vollmond des Vorjahres am 31. Dezember statt. Der Vollmond ist nämlich der 14. Tag nach dem Neumond. Wurde ein solches Schaltmonat hinzugefügt, musste man aber im letzten 30-tägigen Mondmonat eines 19-jährigen Zyklus den letzten Tag überspringen (Mondsprung), welcher Monat somit nur 29 Tage hatte. Zusammenfassend gibt es also innerhalb eines Mondzyklus 120 Mondmonate mit 30 Tagen und 115 Mondmonate mit 29 Tagen, was insgesamt wieder 235 Mondmonate bzw. 6935 Tage ergibt.

Dirk Steinmetz hat in seinem Buch alle Neumonde innerhalb eines 19-jährigen Zyklus in Abhängigkeit von Goldener Zahl G und Monate übersichtlich dargestellt. Die hochgestellten Buchstaben geben an, ob es sich bei diesem, am Neumond beginnenden Mondmonat, um einen 29-tägigen (^{k}), 30-tägigen (^{l}), einem zusätzlichen 30-tägigen Schaltmonat (^{z}), oder einem Mondsprung mit 29 Tagen (^{m}) handelt (siehe Tabelle (3.5)).

G	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept	Okt.	Nov.	Dez.
1	23^k	21^l	23^k	21^l	21^k	19^l	19^k	17^l	16^k	15^l	14^k	13^l
2	12^k	10^l	12^k	10^l	10^k	8^l	8^k	6^l	5^k	4^l	3^k	2^z
3	$1^l/31^k$		$1^l/31^k$	29^l	29^k	27^l	27^k	25^l	24^k	23^l	22^k	21^l
4	20^k	18^l	20^k	18^l	18^k	16^l	16^k	14^l	13^k	12^l	11^k	10^l
5	9^k	7^l	9^k	7^l	7^k	5^l	5^k	3^l	2^z	$2^k/31^l$	30^k	29^l
6	28^k	26^l	28^k	26^l	26^k	24^l	24^k	22^l	21^k	20^l	19^k	18^l
7	17^k	15^l	17^k	15^l	15^k	13^l	13^k	11^l	10^k	9^l	8^k	7^l
8	6^k	4^l	6^z	5^k	4^l	3^k	2^l	$1^k/30^l$	29^k	28^l	27^k	26^l
9	25^k	23^l	25^k	23^l	23^k	21^l	21^k	19^l	18^k	17^l	16^k	15^l
10	14^k	12^l	14^k	12^l	12^k	10^l	10^k	8^l	7^k	6^l	5^k	4^z
11	3^k	2^l	3^k	2^l	$1^l/31^k$	29^l	29^k	27^l	26^k	25^l	24^k	23^l
12	22^k	20^l	22^k	20^l	20^k	18^l	18^k	16^l	15^k	14^l	13^k	12^l
13	11^k	9^l	11^k	9^l	9^k	7^l	7^k	5^l	4^k	3^l	2^z	$2^k/31^l$
14	30^k	28^l	30^k	28^l	28^k	26^l	26^k	24^l	23^k	22^l	21^k	20^l
15	25^k	23^l	25^k	23^l	23^k	21^l	21^k	19^l	18^k	17^l	16^k	15^l
16	8^k	6^l	8^k	6^l	6^k	4^l	4^k	2^z	1^l	$1^k/30^l$	29^k	28^l
17	27^k	25^l	27^k	25^l	25^k	23^l	23^k	21^l	20^k	19^l	18^k	17^l
18	16^k	14^l	16^k	14^l	14^k	12^l	12^k	10^l	9^k	8^l	7^k	6^l
19	5^k	3^l	5^z	4^k	3^l	2^k	$1^l/31^k$	29^l	28^k	27^m	25^k	24^l

Tabelle 3.5: Die Neumonde des 19-jährigen Mondzyklus

Mit der Tabelle kann man nun genau den Ostervollmond (oder Ostergrenze) bestimmen. Wir wissen, dass Ostern auf den Sonntag nach dem Frühlingsvollmond, am oder unmittelbar nach dem Tag des Frühlingsäquinoktiums am 21. März, fällt. Hat ein Jahr z.B. die Goldene Zahl 1, ist der Frühlingsneumond am 23. März und der Ostervollmond somit 13 Tage später, also am 5. April. Weiß man zusätzlich noch den Sonntagsbuchstaben, kann das Datum des Osterfestes bestimmt werden. Bestimmt man nun alle möglichen Ostertermine innerhalb eines 19-jährigen Zyklus, lässt sich feststellen, dass Ostern frühestens am 22. März bzw. spätestens am 25. April gefeiert wird. In folgender Tabelle (3.6) sind alle möglichen Ostertermine, in Abhängigkeit von Goldener Zahl, Frühlingsvollmond und Sonntagsbuchstabe, eingetragen.

GZ	Vollmond	SB *A*	SB *B*	SB *C*	SB *D*	SB *E*	SB *F*	SB *G*
1	5. April	9. April	10. April	11. April	12. April	6. April	7. April	8. April
2	25. März	26. März	27. März	28. März	29. März	30. März	31. März	1. April
3	13. April	16. April	17. April	18. April	19. April	20. April	14. April	15. April
4	2. April	9. April	3. April	4. April	5. April	6. April	7. April	8. April
5	22. März	26. März	27. März	28. März	29. März	23. März	24. März	25. März
6	10. April	16. April	17. April	11. April	12. April	13. April	14. April	15. April
7	30. März	2. April	3. April	4. April	5. April	6. April	31. März	1. April
8	18. April	23. April	24. April	25. April	19. April	20. April	21. April	22. April
9	7. April	9. April	10. April	11. April	12. April	13. April	14. April	8. April
10	27. März	2. April	3. April	28. März	29. März	30. März	31. März	1. April
11	15. April	16. April	17. April	18. April	19. April	20. April	21. April	22. April
12	4. April	9. April	10. April	11. April	5. April	6. April	7. April	8. April
13	24. März	26. März	27. März	28. März	29. März	30. März	31. März	25. März
14	12. April	16. April	17. April	18. April	19. April	13. April	14. April	15. April
15	1. April	2. April	3. April	4. April	5. April	6. April	7. April	8. April
16	21. März	26. März	27. März	28. März	22. März	23. März	24. März	25. März
17	9. April	16. April	10. April	11. April	12. April	13. April	14. April	15. April
18	29. März	2. April	3. April	4. April	5. April	30. März	31. März	1. April
19	17. April	23. April	24. April	18. April	19. April	20. April	21. April	22. April

Tabelle 3.6: Die möglichen Ostertermine in Abhängigkeit von Goldener Zahl und Sonntagsbuchstabe

Nur durch Zuhilfenahme solcher Tabellen wurde damals das Osterdatum bestimmt. Heute berechnet man das Osterdatum hauptsächlich mit der berühmten Osterformel (siehe Kapitel 7) des Mathematikers Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855).

3.3 Gründe für eine Kalenderreform

Beim Julianischen Kalender wurden Mängel festgestellt welche durch die Gregorianische Kalenderreform behoben werden sollten. Die Gründe für die Reform sind die Näherungen der drei grundlegenden Naturerscheinungen, welche auf Erde, Sonne und Mond basieren.

3.3.1 Das julianische Jahr im Vergleich zum tropischen Jahr

Die durchschnittliche Länge eines julianischen Jahres beträgt 365,25 Tage und ist im Vergleich zum wahren Sonnenlauf entsprechenden tropischen Jahres (365,2422 Tagen), um etwa 11 Minuten länger. Nach etwa 130 Tagen summiert sich die Differenz zu einem kompletten Tag. Die Länge eines tropischen Jahres nimmt laut Simon Newcomb (1835 - 1909), aufgrund der Präzession, kontinuierlich um $6,13 \cdot 10^{-8}$ Tage jährlich ab. Deshalb lassen sich die genauen Abweichungen nur in Abhängigkeit eines bestimmten Jahres feststellen. Folgende Tabelle soll die folgenden Differenzen, für ausgewählte Jahre, deutlich darstellen, wobei a für Jahr, d für Tag, min für Minuten und s für Sekunden steht:

Jahr	**Länge**	**um ... kürzer als das jul. Jahr**	**1 Tag Fehler in...**
45 v. Chr.	365,2423181d	0,0076819d = 11min 3,7s	130,1761a
1 v. Chr.	365,2423154d	0,0076846d = 11min 3,9s	130,1304a
500	365,2422848d	0,0077153d = 11min 6,6s	129,6134a
1000	365,2422541d	0,0077459d = 11min 9,2s	129,1006a
1500	365,2422235d	0,0077766d = 11min 11,9s	128,5917a
2000	365,2421928d	0,0078072d = 11min 14,5s	128,0869a
2010	365,2421922d	0,0078078d = 11min 14,6s	128,0768a

Tabelle 3.7: Tropische Jahreslänge im Vergleich zum julianischen Jahr

Im Jahr 2010 betrug zum Beispiel die Länge des tropischen Jahres 365,2421922 Tage und war etwa 11 Minuten und 14,6 Sekunden kürzer als das julianische Jahr. Diese Differenz summiert sich in 128,0768 Jahren zu einem ganzen Tag auf.

3.3.2 Der Metonische Zyklus

Der Metonische Zyklus wiederholt sich alle 19 Jahre. Es ergibt sich somit, dass 235 synodische Monate ungefähr 19 julianischen Jahren entsprechen. Für 235 Erdumdrehungen benötigt der Mond 235 $\times$ 29,530589 Tage = 6939,688415 Tage. Die Länge eines 19-jährigen Mondzyklus beträgt jedoch 19 $\times$ 365,25 Tage = 6939,75 Tage. Die Differenz zwischen zyklischer und wahrer Mondbewegung ist in 19 Jahren somit 1 Stunde 28 Minuten und 41 Sekunden, was sich zu einem ganzen Tag in 308,516684 Jahren ergibt.

3.3.3 Auswirkungen auf das Osterdatum

Die Fehler des Julianischen Kalenders summierten sich über die Jahre hinweg auf, wodurch der Kalender am Tag vor der Gregorianischen Kalenderreform erheblich von den wahren Bewegungen von Sonne und Mond abwich. Demzufolge beobachtete man zum Beispiel das Frühlingsäquinoktium im 16. Jh. schon am 10. oder 11. März. Dieser Fehler, also die Verschiebungen von Frühlings-Tag-und-Nachtgleiche, wirkte sich natürlich auch auf das Osterfest aus. Das heißt Ostern wurde oft am „falschen" Tag gefeiert, nämlich manchmal erst im zweiten Mondmonat des Frühlings, also bis zu 35 Tage zu spät. Hätte man den Kalender nicht reformiert, wäre Ostern einige Male mit dem astronomischen Neumond zusammengefallen. Es wäre somit möglich gewesen, dass eine Sonnenfinsternis am Karfreitag stattfinden hätte können. Die Bibel erwähnt aber, dass die Finsternis beim Tod von Jesu ein Wunder gewesen sei, was durch die mögliche Sonnenfinsternis leicht erklärbar gewesen wäre. Dies war Grund genug, um den bisherigen Julianischen Kalender zu korrigieren und die astronomisch beobachtbaren Daten wieder mit dem Kalender in Einklang zu bringen.

3.4 Die Kalenderreform nach Gregor XIII.

Am 24. Februar 1582 verkündete Papst Gregor XIII. mit seiner Bulle „Inter gravissimas" die neue Ordnung des Kalenders. Schon seit dem 14. Jahrhundert versuchte man vergeblich den Julianischen Kalender zu korrigieren. Die verschiedenen Vorschläge für eine Kalenderreform wurden immer wieder abgelehnt. Im Jahre 1567 oder 1577 stellte Gregor XIII. endlich eine Kommission zusammen, die sich mit der Korrektur des Kalenders und den bisher bekannten Vorschlägen befassen sollte. Im Oktober 1582 war es dann soweit und die Reform wurde nach Plan durchgeführt, zumindest in Italien, Spanien, Portugal und in weiten Teilen von Polen. Im Erzherzogtum Österreich, also Nieder- und Oberösterreich, ordnete Kaiser Rudolf II. erst am 1. Oktober 1583 die Reformdurchführung an. Die letzte Umstellung vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender erfolgte 1949 in China.

Folgende Punkte wurden durch die Kalenderreform korrigiert:

- Da der Julianische Kalender im 16. Jahrhundert dem Verlauf der Sonne bereits zehn Tage nachhinkte, wurden im Oktober 1582 zehn Tage ausgelassen. Es folgte also auf Donnerstag den 4. Oktober, bei ununterbrochener Folge der Wochentage, Freitag der 15. Oktober. Somit wurde das verschobene Frühlingsäquinoktium wieder korrigiert und das Osterfest konnte nicht mehr am falschen Tag gefeiert werden. Natürlich wurden durch die Auslassung der zehn Tage Heiligengedenktage übersprungen, welche zwischen dem 15. und 17. Oktober verteilt wurden.

- Zur bisherigen Schaltregel wurde nun eine Regel hinzugefügt. Bisher galt jedes vierte Jahr als ein Schaltjahr. In der neuen Reform wird es einen Unterschied bei den Säkularjahren geben. Die Säkularjahre sind nur noch Schaltjahre, wenn sich die Jahreszahl ohne Rest durch 400 teilen lässt. Das Jahr 1600 war also ein Schaltjahr, die Jahre 1700, 1800 und 1900 jedoch nicht, 2000 war wiederum ein Schaltjahr.

  Mathematisch lassen sich die Schaltregeln folgendermaßen ausdrücken:

  (a) Das Jahr j ist ein Schaltjahr, wenn $j \equiv 0 \pmod 4$, nicht aber wenn $j \equiv 0 \pmod{100}$.

  (b) Ist jedoch $j \equiv 0 \pmod{400}$, dann findet das Schaltjahr doch statt.

- Um den Mondkalender zu korrigieren, wurde der Epaktenzyklus eingeführt. Bisher wurden nur die Goldenen Zahlen in den Kalender eingetragen, nun werden aber auch die sogenannten Epakten notiert. Mit Hilfe der Epakte eines Jahres, kann der Neumond aus dem Kalender abgelesen werden.

3.4.1 Mathematische Erklärung der Schaltregeln

Das tropische Jahr, also die Länge welche die Erde benötigt um sich einmal um die Sonne zu drehen, beträgt etwa 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 45 Sekunden, also ziemlich genau $365+104629/432000 \approx 365,242196759$ Tage. Ein gewöhnliches Jahr, also ein Gemeinjahr, hat 365 Tage und ein Schaltjahr 366. Im Julianischen Kalender wurde deshalb alle vier Jahre ein Schalttag eingefügt, folglich ergibt sich das julianische Jahr zu 365,25 Tagen. Mit der neuen Schaltregel des Gregorianischen Kalenders lässt sich die wahre Länge des tropischen Jahres genauer annähern.

Alle durch vier teilbaren Jahre bekommen einen Schalttag, die durch 100 teilbaren Jahre bekommen diesen Schalttag wieder weggenommen und bei den durch 400 teilbaren Jahren wird der Schalttag wieder hinzugefügt. Das gregorianische Kalenderjahr hat also im Durchschnitt $(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400})$ Tage $= (365 + \frac{97}{400})$ Tage $= 365,2425$ Tage.

Wir versuchen nun ein Gesetz für den Wechsel zwischen den Gemeinjahren und Schaltjahren zu finden. Als Literatur wurde der Artikel „Kettenbrüche“ aus den Internationalen Mathematischen Nachrichten, Nummer 192 von Yu. Nesterenko und E. Nikishin [8] verwendet.

Dazu wählen wir die Länge q eines Zyklus, nachdem sich die Folge von gewöhnlichen Jahren und Schaltjahren wiederholt und die Anzahl p von Schaltjahren innerhalb eines solchen Zyklus. Schreibt man das Jahr als $365+\alpha$, mit $\alpha = 0,242196759$, dann muss man also p und q finden, sodass die Größe

$$\beta = q\alpha - p \tag{3.1}$$

so klein wie möglich ist, wobei p und q nicht zu groß sein sollen. Wenn also q einmal vorgegeben ist, muss p die zu $q\alpha$ nächstgelegene ganze Zahl sein. Es lässt sich leicht erkennen, dass in $365q + p$ Tagen etwa q Jahre vergehen. Formt man nun die obige Gleichung (3.1) um und setzt p ein, ergibt sich die Gleichung

$$365q + p = q(365 + \alpha) - \beta.$$

Dividiert man nun die $q(365 + \alpha) - \beta$ Tage durch $365 + \alpha$, also ein Jahr, folgt, dass sich die Erde in $365q + p$ Tagen

$$q - \frac{\beta}{365 + \alpha} \approx q$$

mal um die Sonne dreht. Erst nach $1/\beta$ Zyklen oder nach q/β Jahren summiert sich der Fehler zu einem ganzen Tag auf.

Das mathematische Problem lässt sich folgendermaßen formulieren und mit Hilfe von Kettenbrüchen lösen: Gegeben sei eine Zahl α. Dazu sollen genügend kleine ganze Zahlen p und q gefunden werden, so dass die Zahl β aus (3.1) möglichst klein ist.

Der heute gültige Gregorianische Kalender beruht auf einem 400-jährigen Zyklus, also mit $q = 400$. Mit $\alpha = 0,242196759$ und $q = 400$ ergibt sich $p = 97$. Die Lösung des Problems, mit Hilfe von Kettenbrüchen, findet man im Kapitel 6.3. Von 400 Jahren sind also 303 gewöhnliche und 97 Schaltjahre. Die Näherung ist hinreichend gut, ein Fehler von einem Tag akkumuliert sich nämlich erst in ca. 3300 Jahren. Würde man $q = 128$ und $p = 31$ wählen, hätte man eine noch bessere Näherung erreichen können. Obwohl sich der Fehler erst in ca. 213000 Jahren zu einem Tag aufsummieren würde, ist ein 128-jähriger Zyklus unpraktisch im Vergleich zum 400-jährigen Zyklus. Betrachtet man nämlich diesen neuen Zyklus näher, stellt man schnell fest, dass sich nach 400 Jahren die Abfolge der Wochentage wiederholt. Da der 15. Oktober 1582 ein Freitag war, war auch der 15. Oktober 1982 ein Freitag und es wird auch der 15.

Oktober 2382 ein Freitag sein, wie sich leicht zeigen lässt. Jedes Gemeinjahr besteht aus 52 Wochen und 1 Tag und jedes Schaltjahr aus 52 Wochen und 2 Tagen. Der Wochentag verschiebt sich also in einem Gemeinjahr um einen Tag und im Schaltjahr um einen weiteren Tag. In 400 Jahren verschiebt sich der Wochentag somit um insgesamt $400 + 97 = 497$ Tage. Da 497 ganzzahlig und durch 7 teilbar ist, also $497 \equiv 0 \pmod 7$ bzw. $497 = 71 \times 7$, ist der Wochentag nach 400 Jahren wieder derselbe.

4 Teilbarkeit, ggT und kgV

Man bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die positiven ganzen Zahlen von $\mathbb{Z}$ und die nichtnegativen ganzen Zahlen von $\mathbb{Z}$ bezeichnet man mit $\mathbb{N}_0$. In diesem Kapitel werden wir uns mit Fragen und Problemen der Teilbarkeit ganzer Zahlen beschäftigen.

Definition 4.1. *Seien $a, d \in \mathbb{Z}$. Die Zahl d teilt a bzw. d ist ein Teiler von a, wenn es eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gibt mit*

$$a = x \cdot d.$$

Kurz schreibt man $d|a$. Die Zahl a heißt dann Vielfaches von d.

Bemerkung 4.1. *Für alle $d \in \mathbb{Z}$ gilt $d|0$. Aus $d|a$ folgt $d|(-a)$ und $(-d)|a$. Deshalb werden wir uns im Folgenden hauptsächlich mit Zahlen $a \in \mathbb{N}_0$ und positive Teiler $d \in \mathbb{N}$ beschäftigen.*

Im folgenden Lemma sind einige einfache Rechenregeln für die Teilbarkeit zusammengefasst.

Lemma 4.1. Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt

1. $a|a$
2. $a|b$ und $b|c \;\Rightarrow\; a|c$
3. $a|b$ und $c|d \;\Rightarrow\; (ac)|(bd)$
4. $a|b$ und $a|c \;\Rightarrow\; a|(bx + cy)$
5. $a|b$ und $b|a \;\Rightarrow\; a = b$.

Beweis. 1. Es gilt $a = 1 \cdot a$, also $a|a$.

2. Wegen $a|b$ und $b|c$ gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ mit $b = ax_1$ und $c = bx_2$. Somit gilt $c = bx_2 = a(x_1x_2)$. Aus $x_1x_2 \in \mathbb{N}$ folgt $a|c$.

3. Wegen $a|b$ und $c|d$ gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ mit $b = ax_1$ und $d = cx_2$. Multipliziert man nun b mit d folgt $bd = ax_1 \cdot cx_2 = (ac) \cdot (x_1x_2)$. Da $x_1x_2 \in \mathbb{N}$ folgt $(ac)|(bd)$.

4. Wegen $a|b$ und $a|c$ gibt es $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ mit $b = ax_1$ und $c = ay_1$. Multipliziert man nun b mit x und c mit y und addiert das Ergebnis folgt $bx + cy = ax_1x + ay_1y = a(x_1x + y_1y)$. Da $x_1x + y_1y \in \mathbb{Z}$ folgt $a|(bx + cy)$.

4. Wegen $a|b$ gibt es $x_1 \in \mathbb{N}$ mit $b = ax_1$ und es folgt $a \leq b$. Aus $b|a$ folgt dann $b \leq a$. Damit gilt $a = b$.

□

Satz 4.2 (Division mit Rest)**.** *Seien $a, m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit den Eigenschaften*

$$a = qm + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < m.$$

Die Zahl q heißt ganzzahliger Quotient von a und m, und r ist der Rest der Division von a durch m.

Beweis. (aus [9, Lemma 1.3])
Zunächst beweisen wir die Existenz von q, r mit den Eigenschaften $a = qm+r$ und $0 \leq r < m$. Wir definieren die Menge

$$M = \{k \in \mathbb{N} : km > a\}.$$

Da $m \in \mathbb{N}$, ist $m \geq 1$ und es gilt $(a + 1)m = am + m \geq a + m > a$. Daraus folgt $(a + 1) \in M$ und M ist eine nichtleere Menge. $M \subseteq \mathbb{N}_0$ hat somit ein kleinstes Element k_0 und es ist $q := (k_0 - 1) \notin M$. Daraus folgt

$$qm \leq a < (q + 1)m.$$

Weiters setzen wir $r = a - qm$, dann ist $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$.

Als nächstes müssen wir noch zeigen, dass r, q eindeutig bestimmt sind. Dazu nehmen wir an, dass gilt $a = qm + r = q'm + r'$ mit $0 \leq r, r' < m$. Daraus folgt $r' - r = (q - q')m$. Es ist $|q - q'| \geq 1$ falls $q \neq q'$. Deshalb gilt $|(q - q')m| = |q - q'|m \geq m$. Da $|r - r'| \leq m - 1$ gilt

$$m \leq |(q - q')m| = |r - r'| \leq m - 1.$$

Dass $m \leq m - 1$ stellt aber einen Widerspruch dar und es muss $q = q'$ und $r = r'$ gelten.

□

Manchmal interessiert man sich nicht nur für einen Teiler einer ganzen Zahl, sondern auch, welche Teiler die Zahl mit einer anderen gemeinsam hat. Da eine ganze Zahl endlich viele Teiler hat, ist es sinnvoll, auch den größten gemeinsamen Teiler zu definieren.

Definition 4.2. *Seien $a, b, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Die Zahl d wird gemeinsamer Teiler von a und b genannt, falls $d|a$ und $d|b$.*

Definition 4.3. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Eine Zahl $d \in \mathbb{N}$ heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b, wenn d ein gemeinsamer Teiler von a und b ist und falls t ein weiterer Teiler von a und b ist, gilt $t|d$. Man schreibt $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.*

Es gelten folgende Eigenschaften für den ggT zweier Zahlen.

Proposition 4.3. Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$ gilt

1. $\mathrm{ggT}(ac, bc) = |c|\mathrm{ggT}(a, b)$,
2. $\mathrm{ggT}(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}) = \frac{1}{|c|}\mathrm{ggT}(a, b)$, mit $c|a$ und $c|b$.

Beweis. (aus [10, Satz 5.1.2])

1. Sei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Dann ist $|c|d$ für alle $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein Teiler von ca und cb. Aus der Definition der Teilbarkeit folgt, dass es $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a = dx$ und $b = dy$. Außerdem gilt $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$, da wenn $\mathrm{ggT}(x, y) \neq 1$ wäre $\mathrm{ggT}(a, b) > d$. Weiters gilt auch $ca = cdx$ und $cb = cdy$. Da $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$ und $|c|$ der größte Teiler von c ist, folgt $\mathrm{ggT}(ac, bc) = |c|\mathrm{ggT}(a, b)$.
2. Der Beweis geht analog zu 1.

$\square$

Definition 4.4. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Falls $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, dann sind die Zahlen a und b teilerfremd.*

Satz 4.4. *Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Dann ist d die kleinste positive Zahl, die sich in der Form $ax + by$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt. Das heißt*

$$\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{kd : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis. (aus [9, Satz 1.36])
Sei d die kleinste positive ganze Zahl der Menge $ax + by$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, also $d = ax_0 + by_0$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Ist t ein gemeinsamer Teiler von a und b, dann gilt $t|d$. Damit wir zeigen können,

dass d auch ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, nehmen wir an $d \nmid a$. Daraus folgt aus Satz 4.2, dass $a = qd + r$ mit $0 < r < d$. Es gilt also

$$r = a - qd = a - q(ax_0 + by_0) = a(1 - x_0) + b(-qy_0).$$

Da aber $(1 - x_0) \in \mathbb{Z}$ und $(-qy_0) \in \mathbb{Z}$, wäre dies ein Widerspruch dazu, dass d die kleinste positive Zahl der Form $ax + by$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ ist. Also gilt $d|a$. Analog geht man vor um zu zeigen, dass $d|b$ und es gilt $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Jede ganze Zahl der Form $ax+by$ ist ein Vielfaches von d. Da $md = a(mx_0)+b(my_0)$ ist auch jedes Vielfache von d wieder von der Form $ax+by$, womit der Satz bewiesen ist.

□

Proposition 4.5. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Falls $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und $a|bc$, dann gilt $a|c$.

Beweis. Wegen Satz 4.4 und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, gibt es Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $ax + by = 1$. Damit gilt auch $c = acx + bcy$. Da $a|acx$ und $a|bcy$, folgt $a|c$.

□

Wir wollen nun wissen, wie man den ggT zweier ganzer Zahlen möglichst schnell und einfach bestimmen kann. Der Euklidische Algorithmus gibt ein Verfahren an, um den größten gemeinsamen Teiler zu berechnen.

Satz 4.6 (Euklidischer Algorithmus)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{N}$, und $a \geq b$. Wir definieren $a_0 = a, a_1 = b$ und a_n für $n \geq 2$ mit*

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_1 q_1 + a_2 && \textit{mit } 0 \leq a_2 < a_1 \\
a_1 &= a_2 q_2 + a_3 && \textit{mit } 0 \leq a_3 < a_2 \\
&\vdots \\
a_{s-2} &= a_{s-1} q_{s-1} + a_s && \textit{mit } 0 \leq a_s < a_{s-1} \\
a_{s-1} &= a_s q_s,
\end{aligned}$$

dann gilt $a_s = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Beweis. (aus [9, Satz 1.33])
Da $a, b \in \mathbb{N}$ und $a_0 > a_1 > \cdots \geq 0$ und alle $a_i \in \mathbb{N}_0$, muss der Euklidische Algorithmus endlich sein. Es gilt auch $a_s|a_{s-1}$. Setzt man nun $a_{s-1} = a_s q_s$ in die Gleichung für a_{s-2} ein, erhält man

$$a_{s-2} = a_{s-1}q_{s-1} + a_s = a_s q_s q_{s-1} + a_s = a_s(q_s q_{s-1} + 1)$$

und es folgt, dass $a_s | a_{s-2}$. Für a_{s-3} gilt dann

$$a_{s-3} = a_{s-2}q_{s-2} + a_{s-1} = a_s q_{s-1} q_{s-2} + (a_s q_{s-1} + a_s) = a_s(q_{s-1}q_{s-2} + q_{s-1} + 1),$$

und daher folgt wiederum $a_s | a_{s-3}$. Setzt man dieses Verfahren fort, sieht man, dass $a_s | a_1 = b$ und $a_s | a_0 = a$. Als nächstes nehmen wir an, dass es einen weiteren Teiler t von a und b gibt. Dann gilt $t | a_0$ und $t | a_1$. Damit folgt aber auch dass t ein Teiler von $a_2, a_3, \ldots, a_s$ ist. Da also $t | a_s$ gilt, muss $t < a_s$ sein und somit ist $a_s = \mathrm{ggT}(a, b)$.

□

Beispiel 4.1. Wir wollen den ggT von $a = 531$ und $b = 51$ mit dem Euklidischen Algorithmus bestimmen. Es ist also

$$\begin{aligned} 531 &= 10 \cdot 51 + 21 \\ 51 &= 2 \cdot 21 + 9 \\ 21 &= 2 \cdot 9 + 3 \\ 9 &= 3 \cdot 3. \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathrm{ggT}(531, 51) = 3$.

Definition 4.5. *Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Eine Zahl $v \in \mathbb{N}$ wird kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b genannt, falls v die kleinste positive ganze Zahl ist, die durch a und b teilbar ist. Man schreibt $v = \mathrm{kgV}(a, b)$. Falls $a = 0$ oder $b = 0$, wird $\mathrm{kgV}(a, b) = 0$ gesetzt.*

Satz 4.7. *Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann existiert stets ein eindeutig bestimmtes kleinstes gemeinsames Vielfaches $\mathrm{kgV}(a, b)$.*

Beweis. (aus [10, Satz 5.3.2])
Wir müssen also sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit beweisen. Für den Fall, dass $a = 0$ oder $b = 0$ ist $\mathrm{kgV}(a, 0) = \mathrm{kgV}(0, a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ womit die Existenz und Eindeutigkeit folgt. Wir betrachten nun die Menge aller natürlichen Zahlen x für die gilt $a | x$ und $b | x$. Diese Menge ist nicht leer, da $|ab|$ in dieser Menge liegt. Wegen der Wohlordnung der natürlichen Zahlen, besitzt die Menge auch ein kleinstes Element, womit die Existenz von $\mathrm{kgV}(a, b)$ bereits gezeigt ist. Das kleinste Element ist aber auch eindeutig bestimmt, also ist auch $\mathrm{kgV}(a, b)$ eindeutig bestimmt.

□

5 Kongruenzen und Restklassen

In diesem Kapitel wird der Begriff der Kongruenz eingeführt. Wir werden uns den Eigenschaften von Kongruenzen, Beispielen die das Rechnen mit Kongruenzen zeigen sollen und einfachen Rechenregeln widmen.

5.1 Definition, Restklassen und Rechenregeln

Definition 5.1 (Kongruenz)**.** *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Man nennt a kongruent zu b modulo m genau dann, wenn m ein Teiler von $a-b$ ist, also $m|(a-b)$ bzw. $a-b = km$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Man schreibt $a \equiv b \pmod{m}$ oder kurz $a \equiv b\ (m)$.*

Proposition 5.1. Durch die Kongruenz modulo m mit $m \in \mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Beweis. (aus [10, Satz 7.1.1])
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Da m ein Teiler von $a - a = 0$ ist, gilt $a \equiv a \pmod{m}$ und die Relation ist somit reflexiv. Sie ist symmetrisch, denn falls $a \equiv b \pmod{m}$ ist, dann gilt $m|(a-b)$, und es folgt $m|((-1)(a-b))$, also $m|(b-a)$. Damit ist auch $b \equiv a \pmod{m}$. Nach Lemma (4.1) folgt aus $m|(a-b)$ und $m|(b-c)$ auch $m|((a-b)+(b-c))$. Damit gilt dann $m|(a-c)$ bzw. $a \equiv c \pmod{m}$. Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $b \equiv c \pmod{m}$ folgt somit $a \equiv c \pmod{m}$ und die Relation ist demnach transitiv.

□

Zu jeder Äquivalenzrelation, auf einer nichtleeren Menge gehören auch die sogenannten Äquivalenzklassen. Das heißt, für jedes $m \in \mathbb{N}$ zerfallen die ganzen Zahlen bezüglich der Kongruenz modulo m in paarweise disjunkte Teilmengen. Für $a \in \mathbb{Z}$ sei

$$[a]_m := \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a \pmod{m}\} = \{x \in \mathbb{Z} : x = a + km, k \in \mathbb{Z}\}$$

die durch a bestimmte Äquivalenzklasse. Diese Äquivalenzklassen werden Restklassen modulo m genannt. Die Menge aller Restklassen modulo m wird mit $\mathbb{Z}_m$ bezeichnet,

$$\mathbb{Z}_m = \{[a]_m : a \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposition 5.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$, dann existiert $r \in \{0, ..., m-1\}$ mit $a \equiv r \pmod{m}$, d.h. $[a]_m = [r]_m$.

Beweis. Wegen Satz 4.2 gibt es eindeutig bestimmte Zahlen q, r mit $a = qm + r$ wobei $r \in \{0, \dots, m-1\}$. Daraus folgt $a \equiv r \pmod{m}$.

□

Beispiel 5.1. Die Menge der ganzen Zahlen zerfällt bezüglich der Kongruenz modulo 7 in sieben Restklassen,

$$\mathbb{Z}_7 = \{[0]_7, [1]_7, [2]_7, [3]_7, [4]_7, [5]_7, [6]_7\}.$$

Zum Beispiel liegen alle Vielfachen von 7 in einer gemeinsamen Restklasse modulo 7.

Es werden nun einige Rechenregeln für den Umgang mit Kongruenzen zusammengefasst.

Proposition 5.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Sei $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$, dann gilt

(a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ und

(b) $ac \equiv bd \pmod{m}$ und

(c) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (aus [11, Kapitel 2, §1.1])
Aus der Definition der Kongruenz gibt es k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$, sodass gilt $a = k_1 m + b$ und $c = k_2 m + d$. Aus $a + c = (k_1 m + b) + (k_2 m + d) = (k_1 + k_2)m + (b + d)$ folgt somit $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. Außerdem ist $ac = (k_1 m + b)(k_2 m + d) = (k_1 k_2 m + k_1 d + k_2 b)m + bd$ und damit $ac \equiv bd \pmod{m}$. Aussage (c) folgt aus (b) und mit Hilfe vollständiger Induktion nach n.

□

Aus Proposition 5.3 (b) lässt sich leicht folgern, dass, wenn $a \equiv b \pmod{m}$ gilt, auch bei beliebigem ganzen $c \in \mathbb{Z}$, $ac \equiv bc \pmod{m}$ ist. Allerdings gilt die umgekehrte Schlussfolgerung im Allgemeinen nicht. So ist zum Beispiel $9 \cdot 5 = 45 \equiv 15 = 3 \cdot 5 \pmod{5}$ aber $9 \equiv 3 \pmod{5}$ gilt nicht. Bei Kongruenzen darf also nicht zwingend gekürzt werden. Folgender Satz zeigt jedoch, dass es auch eine Kürzungsregel für Kongruenzen gibt.

Proposition 5.4. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und sei $d = \mathrm{ggT}(c, m)$. Wenn $ac \equiv bc \pmod{m}$ ist, dann ist $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

Beweis. Da $ac \equiv bc \pmod{m}$ bzw. $c(a-b) = km$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass m ein Teiler von $c(a-b)$ ist. Dann ist aber auch $\frac{m}{d}$ ein Teiler von $(a-b) \cdot \frac{c}{d}$. Da $\operatorname{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}) = 1$, muss $\frac{m}{d}$ auch ein Teiler von $(a-b)$ sein und es gilt $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$.

□

Bemerkung 5.1. *Falls also* $ac \equiv bc \pmod{m}$ *und* $\operatorname{ggT}(c, m) = 1$*, dann gilt* $a \equiv b \pmod{m}$*.*

5.2 Rechnen mit Restklassen

Es ist auch sinnvoll, genau wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen, Rechenoperationen für Restklassen festzulegen. Wir definieren zwei binäre Operationen auf $\mathbb{Z}_m$, der Menge aller Restklassen modulo m.

Definition 5.2. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Dann definiert man durch*

$$[a]_m \oplus [b]_m := [a+b]_m$$

eine Addition und durch

$$[a]_m \odot [b]_m := [a \cdot b]_m$$

eine Multiplikation in der Menge der Restklassen modulo m*, wobei* $+, \cdot$ *jeweils die herkömmliche Addition bzw. Multiplikation in* $\mathbb{Z}$ *bedeuten.*

Aus der Definition ist nicht klar, dass die Operationen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Restklasse sind. Es muss also nachgewiesen werden, dass die Operationen $\oplus$ und $\odot$ wohldefiniert sind.

Proposition 5.5. Die in Definition 5.2 beschriebenen Operationen $\oplus$ und $\odot$, also die Addition und Multiplikation von Restklassen modulo m, sind wohldefiniert.

Beweis. Seien $[a]_m = [b]_m$ und $[c]_m = [d]_m$. Es muss gezeigt werden, dass $[a]_m \oplus [c]_m = [b]_m \oplus [d]_m$ und $[a]_m \odot [c]_m = [b]_m \odot [d]_m$ gelten. Nach Voraussetzung ist also $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$. Dann folgt aus Proposition 5.3 (b), dass $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ und somit ist $[a+b]_m = [c+d]_m$ bzw. $[a]_m \oplus [c]_m = [b]_m \oplus [d]_m$. Für $\odot$ geht man analog vor.

□

Definition 5.3. *Sei* R *eine nichtleere Menge und seien* $+$ *und* $\cdot$ *Verknüpfungen in* R*. Dann ist* $(R, +, \cdot)$ *ein Ring falls gilt,* *1.* $\exists 0 \in R, \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x,$

2. $\forall x \in R, \exists y \in R : x + y = y + x = 0,$

3. $\forall x, y, z \in R : (x + y) + z = x + (y + z),$

4. $\forall x, y \in R : x + y = y + x,$

5. $\forall x, y, z \in R : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$

6. $\forall x, y, z \in R : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$ *und* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z).$

Das Element 0 aus 1. heißt neutrales Element bezüglich +. Das Element y aus 2. heißt inverses Element zu x bezüglich +. $(R, +, \cdot)$ *ist ein Ring mit Einselement falls zusätzlich gilt*

7. $\exists 1 \in R, \forall x \in R : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$

Falls zusätzlich

8. $\forall x, y \in R : x \cdot y = y \cdot x$

gilt, dann nennt man $(R, +, \cdot)$ *einen kommutativen Ring.*

Satz 5.6. *Die Restklassen modulo m bilden bezüglich der Addition und Multiplikation von Restklassen einen kommutativen Ring mit Eins* $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$. *Man nennt diesen Ring auch Restklassenring modulo m.*

Beweis. Wir müssen also alle acht Punkte aus Definition 5.3 mit den Operationen $\oplus$ und $\odot$ zeigen.

1. Es gilt $[x]_m \oplus [0]_m = [x + 0]_m = [x]_m$ und $[0]_m \oplus [x]_m = [0 + x]_m = [x]_m$. Also ist $[x]_m \oplus [0]_m = [x]_m \oplus [0]_m = [x]_m$.
2. Sei $y \in \mathbb{Z}$ das inverse Element zu $x \in \mathbb{Z}$, also $y = -x$. Es gilt $[x]_m \oplus [y]_m = [x + y]_m = [x - x]_m = [0]_m$. Es gilt auch $[y]_m \oplus [x]_m = [y + x]_m = [(-x) + x]_m = [0]_m$.

Die Behauptungen 3., 4., 5., und 6 folgen entsprechend aus der Definition der Addition und Multiplikation von Restklassen modulo m.

7. Es gilt $[x]_m \odot [1]_m = [1 \cdot x]_m = [x]_m$ und $[1]_m \odot [x]_m = [x \cdot 1]_m = [x]_m$. Also gibt es ein neutrales Element bezüglich $\odot$, nämlich $[1]_m$.
8. Es gilt $[x]_m \odot [y]_m = [x \cdot y]_m = [y \cdot x]_m = [y]_m \odot [x]_m$.

$\square$

In einem Ring gibt es also immer ein inverses Element bezüglich $+$. Als nächstes wollen wir wissen, ob es zu den einzelnen Elementen auch ein inverses Element bezüglich $\cdot$ gibt.

Definition 5.4. *In einem Ring $(R, +, \cdot)$ mit Eins heißt $a \in R$ invertierbar, falls es ein $b \in R$ gibt mit $ab = ba = 1$.*

Satz 5.7. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$. Dann ist $[a]_m$ genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$.*

Beweis. (aus [9, Satz 2.26])
$[a]_m$ ist genau dann invertierbar, wenn es ein $b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $[a]_m \odot [b]_m = [b]_m \odot [a]_m = [1]_m$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $b \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ab \equiv 1 \pmod m$. Dies ist aber wiederum äquivalent dazu, dass $b, k \in \mathbb{Z}$ mit $ab + mk = 1$ existieren. Und das ist aber wieder äquivalent zu $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$.

$\square$

Definition 5.5. *Ist $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$, dann nennt man $[a]_m$ eine prime Restklasse.*

Beispiel 5.2. $\mathbb{Z}_4$ besteht aus den Elementen $[0]_4, [1]_4, [2]_4$ und $[3]_4$. Es sind aber nur $[1]_4$ und $[3]_4$ invertierbar, da $[1]_4 \odot [1]_4 = [1]_4$ und $[3]_4 \odot [3]_4 = [1]_4$.

Im nächsten Abschnitt wird ein Anwendungsbeispiel zu Kongruenzen und Restklassen durchgemacht, nämlich der ewige Kalender. Dazu benötigen wir jedoch noch die Definition der Abrundungsfunktion oder Gaußklammer.

Definition 5.6. *Sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl die kleiner oder gleich x ist. Die Abrundungsfunktion oder Gaußklammer $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \to \lfloor x \rfloor$ ist also definiert als*

$$\lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}.$$

5.3 Anwendung: Der ewige Kalender

Als Literatur für folgendes Kapitel wurde das Buch *Elemente der Arithmetik und Algebra* von H. Scheid und W. Schwarz verwendet ([12], Kapitel 1.10, S. 100 - 102).

Der *ewige Kalender* ist eine Formel, mit der man aus einem beliebigen Datum des Gregorianischen Kalenders, den Wochentag bestimmen kann. Um solch eine Formel entwickeln zu können, treffen wir zunächst die Annahme, dass ein Jahr am 1. März beginnt. Somit werden die Schalttage jeweils am Ende eines Schaltjahres angehängt, also Ende Februar. Der 1., 3., 5., 6., 8., 10. und 11. Monat eines Jahres haben je 31 Tage, der 2., 4., 7., und 9. Monat je

30 Tage und der 12. Monat hat entweder 28 oder 29 Tage, je nachdem ob wir uns in einem Schaltjahr befinden. Wir ordnen nun jedem Wochentag eine Nummer zu:

So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
0	1	2	3	4	5	6

Der 1. März 1600 war ein Mittwoch und hat also die Nummer 3. Da $365 \equiv 1 \pmod 7$ gilt für die Nummer a_t des 1. März des Jahres $1600 + t$

$$a_t \equiv 3 + t + \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{t}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t}{400} \right\rfloor \pmod 7.$$

Schreiben wir eine Jahreszahl in der Form $100c + d$ mit $0 \leq d < 100$, dann ist $t = 100c + d - 1600 = 100(c - 16) + d$ und

$$\left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor = 25(c-16) + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor, \qquad \left\lfloor \frac{t}{100} \right\rfloor = c - 16 \qquad \text{und} \qquad \left\lfloor \frac{t}{400} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c-16}{4} \right\rfloor.$$

Damit ist nun

$$\begin{aligned} a_t &\equiv 3 + 100(c-16) + d + 25(c-16) + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor - (c-16) + \left\lfloor \frac{c-16}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv -1985 + 124c + d + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv 3 + 5c + d + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor \pmod 7. \end{aligned}$$

Für a_t führen wir nun eine andere Bezeichnung ein, nämlich $(1.März)_{1600+t} = (1.1)_{1600+t}$. Allgemein schreiben wir $(n.m)_j$ für die Nummer des $n$ten Wochentages im Monat m im Jahr j. Zu beachten ist, dass Jänner und Februar als 11. und 12. Monat des Vorjahres zählen. Damit der Wochentag eines beliebigen Datums bestimmt werden kann, müssen die unterschiedlichen Längen der Monate berücksichtigt werden. Es ist:

$$\begin{aligned}
(1.2)_j & & & \equiv (1.1)_j + 3 \pmod 7\\
(1.3)_j & \equiv (1.2)_j + 2 & & \equiv (1.1)_j + 5 \pmod 7\\
(1.4)_j & \equiv (1.3)_j + 3 & & \equiv (1.1)_j + 1 \pmod 7\\
(1.5)_j & \equiv (1.4)_j + 2 & & \equiv (1.1)_j + 3 \pmod 7\\
(1.6)_j & \equiv (1.5)_j + 3 & & \equiv (1.1)_j + 6 \pmod 7\\
(1.7)_j & \equiv (1.6)_j + 3 & & \equiv (1.1)_j + 2 \pmod 7\\
(1.8)_j & \equiv (1.7)_j + 2 & & \equiv (1.1)_j + 4 \pmod 7\\
(1.9)_j & \equiv (1.8)_j + 3 & & \equiv (1.1)_j + 0 \pmod 7\\
(1.10)_j & \equiv (1.9)_j + 2 & & \equiv (1.1)_j + 2 \pmod 7\\
(1.11)_j & \equiv (1.10)_j + 3 & & \equiv (1.1)_j + 5 \pmod 7\\
(1.12)_j & \equiv (1.11)_j + 3 & & \equiv (1.1)_j + 1 \pmod 7
\end{aligned}$$

Wir definieren nun s_m durch $s_1 = 1$ und $(1.(m+1))_j = (1.1)_j + s_{m+1}$ für $1 \leq m \leq 11$. $s_2, \dots, s_{12}$ sind also die Zahlen der letzten Spalte in der obigen Tabelle. Weiters definieren wir $r_m \equiv s_m + 2 \pmod 7$. Die Zahlen für r_m können folgender Tabelle entnommen werden:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_m	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	0	3

Anhand dieser Tabelle lässt sich leicht nachprüfen, dass $r_m \equiv \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor \pmod 7$ gilt. Somit ergibt sich nun folgende Formel, zur Bestimmung des Wochentags eines beliebigen Datums, des Gregorianischen Kalenders:

$$\begin{aligned}
(n.m)_{100c+d} &\equiv 3 + 5c + d + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor + (n-1) + s_m \pmod 7\\
&\equiv n + (s_m + 2) + 5c + d + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor \pmod 7\\
&\equiv n + r_m + 5c + d + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor \pmod 7\\
&\equiv n + 5c + d + \left\lfloor \frac{13m-1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{4} \right\rfloor \pmod 7.
\end{aligned}$$

Beispiel 5.3. Johann Carl Friedrich Gauß wurde am 30. April 1777 in Braunschweig geborgen. Wir suchen nun den Wochentag seines Geburtsdatums. Es ist also $n = 30, m = 2, c = 17$ und $d = 77$. Damit gilt:

$$(30.2)_{1777} \equiv 30 + 5 \cdot 17 + 77 + \left\lfloor \frac{13 \cdot 2 - 1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{77}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor \equiv 3 \pmod 7.$$

Johann Carl Friedrich Gauß wurde somit an einem Mittwoch geboren.

Beispiel 5.4. Wir wollen den Wochentag des 27. Jänner 2018 bestimmen. Hier ist zu beachten, dass der Jänner zum 11. Monat des Vorjahres zählt. Es ist also $n = 27, m = 11, c = 20$ und $d = 17$. Damit gilt:

$$(27.11)_{2017} \equiv 27 + 5 \cdot 20 + 17 + \left\lfloor \frac{13 \cdot 11 - 1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor \equiv 6 \pmod 7.$$

Der 27. Jänner 2018 ist somit ein Samstag.

5.4 Lineare Kongruenzen

Unter einer linearen Kongruenz versteht man eine Gleichung der Form

$$ax \equiv b \pmod m$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, und $m \in \mathbb{N}$. Es stellt sich nun die Frage, ob solche Gleichungen in der Menge der ganzen Zahlen lösbar sind, und wenn ja, von welcher Art diese Lösungen sind.

Beispiel 5.5. Es sollen alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Kongruenz $3x \equiv 7 \pmod 8$ gefunden werden. Laut Definition der Kongruenz muss $3x-7$ ein Vielfaches von 8 sein, das heißt $3x-7 = 8y$ für bestimmte $y \in \mathbb{Z}$. Durch Probieren kommt man sehr schnell drauf, dass $x = 5$ die Kongruenz löst, da $3 \cdot 5 - 7 = 1 \cdot 8$. Addiert (oder subtrahiert) man zu dieser speziellen Lösung 8, erhält man weitere Lösungen, wie zum Beispiel $3 \cdot 13 - 7 = 4 \cdot 8$ oder $3 \cdot (-3) - 7 = (-2) \cdot 8$. Es gibt also mehr Lösungen, welche die lineare Kongruenz erfüllen und diese haben alle die Form $x \equiv 5 \pmod 8$. Es stellt sich nun die Frage, ob damit alle Lösungen der Kongruenz gefunden wurden. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ zwei Lösungen der Kongruenz, also $3x_1 \equiv 7 \pmod 8$ und $3x_2 \equiv 7 \pmod 8$. Dann muss gelten $3(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod 8$ und 8 muss ein Teiler von $(x_1 - x_2)$ sein, womit $x_1 \equiv x_2 \pmod 8$ gilt. Mit $x \equiv 5 \pmod 8$ hat man also alle Lösungen der Kongruenz $3x \equiv 7 \pmod 8$ gefunden.

Satz 5.8. *Die lineare Kongruenz $ax \equiv b \pmod m$ ist genau dann lösbar, wenn $d = \mathrm{ggT}(a, m)$ ein Teiler von b ist. Im Falle der Lösbarkeit, liegen die Lösungen in genau d verschiedenen Äquivalenzklassen modulo m.*

Beweis. (aus [9, Satz 2.55])
Sei $d = \mathrm{ggT}(a, m)$ ein Teiler von b. Wegen Satz (4.4) gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $au + mv = d$. Daraus folgt $au = d - mv$, also $au \equiv d \pmod m$. Da d ein Teiler von b ist, gibt es ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $zd = b$. Damit gilt $auz \equiv dz \pmod m$, also $auz \equiv b \pmod m$. Daraus folgt dass $x_0 = uz$ eine Lösung der Kongruenz $ax \equiv b \pmod m$ ist.

Wir zeigen jetzt, dass wenn die Kongruenz lösbar ist $d|b$. Sei x_0 eine Lösung, dann gilt $m|(ax_0 - b)$. Da $d|m$, folgt auch $d|(ax_0 - b)$ also $d|b$. Als nächstes zeigen wir, dass für die Lösungsmenge gilt

$$L = \left\{x_0 + k\frac{m}{d} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

und die Lösungen verschieden sind. Da

$$a\left(x_0 + k\frac{m}{d}\right) \equiv ax_0 + k\frac{am}{d} \equiv b \pmod{m}$$

ist $x_0 + k\frac{m}{d}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Lösung. Sei nun x_1 auch eine Lösung, dann gilt $ax_1 \equiv b \pmod{m}$ und $ax_0 \equiv b \pmod{m}$. Dann gilt $a(x_1 - x_0) \equiv 0 \pmod{m}$, d.h. $m|a(x_1 - x_0)$ und daraus folgt $\frac{m}{d}|\frac{a}{d}(x_1 - x_0)$. Da $\mathrm{ggT}(\frac{m}{d}, \frac{a}{d}) = 1$ folgt mit Satz (4.5), dass $\frac{m}{d}|(x_1 - x_0)$. Zwei Lösungen sind kongruent wenn gilt $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$. Dies gilt genau dann, wenn $x_0 + k_1\frac{m}{d} \equiv x_0 + k_2\frac{m}{d} \pmod{m}$ bzw. $k_1\frac{m}{d} \equiv k_2\frac{m}{d} \pmod{m}$. Mit Satz (5.4) folgt $k_1 \equiv k_2$ $(\mathrm{mod}\ \frac{m}{\mathrm{ggT}(m, \frac{m}{d})})$ bzw. $k_1 \equiv k_2 \pmod{d}$.

Die Lösungsmenge L mit $k = 0, 1, \dots, d-1$ hat also genau d Lösungen die zueinander nicht kongruent sind.

□

Als nächstes wollen wir nicht nur eine lineare Kongruenz lösen, sondern ein System linearer Kongruenzen. Dazu wird uns der sogenannte Chinesische Restsatz helfen, dessen Beweis gleichzeitig eine Lösungsmethode liefert.

Satz 5.9 (Chinesischer Restsatz)**.** *Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$ und $m_i \in \mathbb{N}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Falls $\mathrm{ggT}(a_i, m_i) = 1$ und $\mathrm{ggT}(a_j, m_j) = 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$, dann ist das System der linearen Kongruenzen*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n}, \end{aligned}$$

lösbar. Alle Lösungen des Systems liegen in einer gemeinsamen Restklasse modulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$.

Beweis. (aus [10, Satz 8.4.1])
Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$M_i := \frac{m}{m_i} = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} m_j.$$

Da alle m_j paarweise teilerfremd sind, gilt $\operatorname{ggT}(M_i, m_i) = 1$. Weiters hat jede lineare Kongruenz $M_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$ nach Satz (5.8) eine Lösung y_i. Wir betrachten nun die Summe

$$x = a_1 M_1 y_1 + \cdots + a_n M_n y_n = \sum_{j=1}^{n} a_j M_j y_j.$$

Da alle m_j Teiler von M_i sind für $i \neq j$, dann gilt $M_j \equiv 0 \pmod{m_i}$ für $i \neq j$. Also ist $x \equiv a_i M_i y_i \pmod{m_i}$. Da $M_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$, folgt $x \equiv a_i \pmod{m_i}$. Damit löst dieses x das System linearer Kongruenzen.

Wir müssen noch zeigen, dass die Lösungen in einer gemeinsamen Restklasse modulo m liegen. Sei y eine Lösung des Gleichungssystems linearer Kongruenzen. Dann gilt $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ und $y \equiv a_i \pmod{m_i}$, also $x \equiv y \pmod{m_i}$. Das heißt, $m_i | (x-y)$ und daraus folgt $m | (x-y)$. Damit gilt $x \equiv y \pmod{m}$, und die Lösungen sind in einer gemeinsamen Restklasse modulo m.

□

Beispiel 5.6. Wir lösen folgendes System linearer Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7}, \\ x &\equiv 2 \pmod{3}, \\ x &\equiv 4 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Das System ist modulo $m = 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105$ lösbar, da $\operatorname{ggT}(3,7) = 1, \operatorname{ggT}(7,5) = 1$ und $\operatorname{ggT}(3,5) = 1$. Es ist $M_1 = 105/3 = 15, M_2 = 35$ und $M_3 = 21$. Wir suchen also Lösungen der Kongruenzen $15x \equiv 1 \pmod{7}$, $35x \equiv 1 \pmod{3}$ und $21x \equiv 1 \pmod{5}$. Die Lösungen lassen sich leicht finden und sind $y_1 = 1, y_2 = 2$ und $y_3 = 1$. Damit ist

$$x = 3 \cdot 15 \cdot 1 + 2 \cdot 35 \cdot 2 + 4 \cdot 21 \cdot 1 = 269 \equiv 59 \pmod{105}$$

die Lösung des gegebenen Gleichungssystems.

6 Kettenbrüche

Im folgenden Kapitel werden wir uns einen groben Überblick über Kettenbrüche verschaffen, um danach die Länge eines tropischen Jahres, mit Hilfe von Kettenbrüchen annähern zu können. Die Geschichte der Kettenbrüche geht weit zurück. Einer der ersten Kettenbrüche wurde bereits 227 - 212 v. Chr. bei Archimedes von Syrakus gefunden. Bis zum 16. Jahrhundert waren Kettenbrüche noch sehr unerforscht, erst Rafael Bombelli (1526 - 1572) untersuchte sie und fand einen Algorithmus für die Entwicklung eines unendlichen Kettenbruchs von Quadratwurzeln einer Nichtquadratzahl. Die Theorie der Kettenbrüche, die heute bekannt ist, beruht jedoch auf dem Mathematiker Pietro Antonio (1548 - 1626). Er entdeckte Eigenschaften und schrieb sie in einem Buch nieder [13].

6.1 Der Kettenbruchalgorithmus

Bei den Kettenbrüchen wird zwischen endlichen und unendlichen Kettenbrüchen unterschieden. Wir wollen zu Beginn mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus eine rationale Zahl in einen Kettenbruch umwandeln.

Sei also $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ und $a > b$. Wir definieren $a_0 := a$, $a_1 := b$ und $a_2, a_3, \ldots, a_s$ wie beim Euklidischen Algorithmus (siehe Satz 4.6). Dann erhalten wir für die Kettenbruchentwicklung folgende Gleichungen,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a_0}{a_1} \\
\frac{a_0}{a_1} &= \frac{a_1 q_1 + a_2}{a_1} = q_1 + \frac{a_2}{a_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} \\
\frac{a_1}{a_2} &= q_2 + \frac{a_3}{a_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}} \\
&\vdots \\
\frac{a_{s-2}}{a_{s-1}} &= q_{s-1} + \frac{a_s}{a_{s-1}} = q_{s-1} + \frac{1}{\frac{a_{s-1}}{a_s}} \\
\frac{a_{s-1}}{a_s} &= q_s.
\end{aligned}$$

Für die Kettenbruchdarstellung der rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ ergibt sich damit

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{a_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} = \cdots = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{s-1} + \cfrac{1}{q_s}}}}.$$

Bemerkung 6.1. *Mit vollständiger Induktion nach i lässt sich leicht zeigen, dass für alle $1 \leq i \leq s-1$ gilt*

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_i + \cfrac{a_{i+1}}{a_i}}}}}.$$

Der Induktionsanfang mit $i = 1$ gilt, da $\dfrac{a_0}{a_1} = q_1 + \dfrac{a_2}{a_1} = q_1 + \dfrac{1}{\frac{a_1}{a_2}}$. Wir nehmen nun an es gilt bereits

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_i + \cfrac{a_{i+1}}{a_i}}}}}. \tag{6.1}$$

Wegen dem Euklidischen Algorithmus ist

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = q_{i+1} + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}}.$$

Setzt man den Kehrwert nun in (6.1) ein, folgt die Behauptung.

Beispiel 6.1. Wir werden nun die Zahl $x = \frac{20}{17}$ durch einen Kettenbruch darstellen. Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} 20 &= 17 \cdot \mathbf{1} + 3 \\ 17 &= 3 \cdot \mathbf{5} + 2 \\ 3 &= 2 \cdot \mathbf{1} + 1 \\ 2 &= 1 \cdot \mathbf{2} + 0. \end{aligned}$$

Die Kettenbruchdarstellung für $x = \frac{20}{17}$ lautet somit

$$\frac{20}{17} = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Wir haben gesehen, dass sich mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, eine rationale Zahl durch einen endlichen Kettenbruch, darstellen lässt. Jetzt stellt sich die Frage, ob auch irrationale Zahlen bzw. alle reellen Zahlen, durch Kettenbrüche darstellbar sind. Um dies zu zeigen, definieren wir eine Abbildung A, die uns beim Kettenbruchalgorithmus hilfreich sein wird. Die Abbildung $A\colon [0,1) \to [0,1)$ wird definiert durch

$$Ax := \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiters definieren wir $A^n x := A(A^{n-1}x)$ $n \geq 1$ und $A^0 x := x$.

Für den Kettenbruchalgorithmus setzen wir

$$a_0 := \lfloor x \rfloor ,$$

wobei $x \in \mathbb{R}$. Damit ist $x = a_0 + \alpha$ mit $0 \leq \alpha < 1$. Für den Fall, dass $\alpha \neq 0$, definieren wir

$$a_1 := \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{A^0 \alpha} \right\rfloor$$

und für $n \geq 1$

$$a_n := \left\lfloor \frac{1}{A^{n-1}\alpha} \right\rfloor ,$$

falls $A^{n-1}\alpha \neq 0$. Ist jedoch $A^m \alpha = 0$ und m die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft, dann stoppt der Algorithmus nach m Schritten, also bei a_m. Dieser Algorithmus ist nicht nur für rationale Zahlen sondern auch für irrationale Zahlen geeignet. Mit folgendem Satz wollen wir jetzt zeigen, dass jede reelle Zahl als Kettenbruch darstellbar ist.

Satz 6.1. *Sei $x \in \mathbb{R}$ wobei $x = \lfloor x \rfloor + \alpha$ und $A^j \alpha \neq 0$ für $1 \leq j \leq n-1$. Dann gilt*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + A^n \alpha}}}}.$$

Diesen Ausdruck nennt man den Kettenbruch von x, wobei x der Wert des Kettenbruchs ist. Die a_n's werden auch Teilnenner oder Kettenbruchziffern von x genannt. Einen Kettenbruch schreibt man auch kurz als

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + A^n\alpha].$$

Das Anfangsglied a_0 ist der ganzzahlige Anteil eines Kettenbruchs und wird daher bei der Kurzschreibweise immer mit einem Strichpunkt von den anderen Kettenbruchziffern getrennt.

Bemerkung 6.2. *Ist die Zahl $x \in [0,1)$, dann ist $a_0 = 0$ und man schreibt noch etwas kürzer*

$$x = [a_1, a_2, \dots, a_n + A^n\alpha].$$

Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden an, dass $a_0 = 0$, dh. $x \in [0,1)$.

Beweis von Satz 6.1. (aus [9, Satz 8.1])
Der Satz wird mit vollständiger Induktion nach n bewiesen. Da $a_0 = 0$ ist $x = \alpha$ und der Induktionsanfang mit $n = 1$ ist erfüllt, denn

$$Ax = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x} - a_1.$$

Durch umformen ist

$$x = \frac{1}{a_1 + Ax}.$$

Wir nehmen nun an es gilt bereits

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + A^n x}}}}, \tag{6.2}$$

wobei $A^n x \neq 0$. Aus der Definition der Abbildung A und des Kettenbruchalgorithmus folgt

$$A^{n+1}x = \frac{1}{A^n x} - \left\lfloor \frac{1}{A^n x} \right\rfloor = \frac{1}{A^n x} - a_{n+1}. \tag{6.3}$$

Durch umformen bekommt man

$$A^n x = \frac{1}{a_{n+1} + A^{n+1}x}. \tag{6.4}$$

Setzt man nun diesen Ausdruck für $A^n x$ in (6.2) ein, erhält man

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + A^{n+1}x}}}}} \tag{6.5}$$

womit der Satz bewiesen ist.

□

Bemerkung 6.3. *Falls $A^n x = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $A^j x = 0$ für alle $j \geq n$ und es ist*

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

In diesem Fall ist also $x \in \mathbb{Q}$. Man nennt so einen Kettenbruch auch einen endlichen Kettenbruch. Mit folgendem Satz wollen wir zeigen, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Satz 6.2. *Die Zahl $x \in [0, 1)$ ist genau dann eine rationale Zahl, falls $A^n x = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ist n die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft, dann gilt*

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Beweis. (aus [9, Satz 8.3])
Für den Fall, dass $A^n x = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, haben wir in Bemerkung (6.3) schon gesehen, dass $x \in \mathbb{Q}$. Jetzt müssen wir noch die Umkehrung zeigen.

Sei x also eine rationale Zahl mit $x = \frac{r_1}{r_0}$, wobei $0 < \frac{r_1}{r_0} < 1$, also $1 \leq r_1 < r_0$. Dann ist

$$1 > Ax = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{r_0}{r_1} - a_1 = \frac{r_0 - a_1 r_1}{r_1}.$$

Wir definieren $r_2 := r_0 - a_1 r_1$ und es ist $\frac{r_2}{r_1} < 1$. Weiters ist $1 \leq r_2 < r_1 < r_0$. Führt man dieses Verfahren fort, dann erhält man im m-ten Schritt

$$A^m x = \frac{r_{m+1}}{r_m} < 1.$$

Damit gilt $1 \leq r_{m+1} < r_m < \cdots < r_0$, für $A^m x \neq 0$. Nach endlich vielen Schritten, sagen wir n, muss also $r_n = 1$ sein und es ist

$$A^{n-1}x = \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Es ist aber

$$A^n x = A(A^{n-1}x) = A\left(\frac{1}{r_{n-1}}\right) = r_{n-1} - \lfloor r_{n-1} \rfloor = 0.$$

Damit haben wir auch gezeigt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^n x = 0$, falls x eine rationale Zahl ist.

□

Bemerkung 6.4. *Die Kettenbruchentwicklung einer Zahl $x \in [0,1)$ ist also genau dann endlich, falls x eine rationale Zahl ist. Wenn der Kettenbruch nicht endlich ist, dann nennt man ihn einen unendlichen Kettenbruch.*

Beispiel 6.2. Wir wollen die Zahl $x = \frac{9}{11}$ durch einen Kettenbruch darstellen. Es ist also

$$\begin{aligned} Ax &= \frac{11}{9} - \left\lfloor \frac{11}{9} \right\rfloor = \frac{11}{9} - 1 = \frac{2}{9}, \\ A^2x &= \frac{9}{2} - \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}, \\ A^3x &= 2 - 2 = 0, \end{aligned}$$

und $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 2$. Die Kettenbruchdarstellung von $x = \frac{9}{11}$ ist also

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = [1, 4, 2].$$

Beispiel 6.3. In diesem Beispiel wollen wir die Kettenbruchentwicklung der Eulerschen Zahl e finden. Sei also $x = e$ und $\alpha = e - 2 = 0{,}71828182\ldots$. Dann ist

$$\frac{1}{e-2} = 1 + 0{,}39221120\ldots, \text{also } e = 2 + \frac{1}{1 + 0{,}39221120\ldots},$$

$$\frac{1}{0{,}39221120\ldots} = 2 + 0{,}54964667\ldots, \text{also } e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + 0{,}54964667\ldots}},$$

$$\frac{1}{0,54964667\ldots} = 1 + 0,81935059\ldots, \text{also } e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + 0,81935059\ldots}}}.$$

Führt man den Algorithmus fort, erhält man für die Kettenbruchentwicklung

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots].$$

Der Kettenbruch weist offensichtlich ein regelmäßiges Muster auf und man kann beweisen, dass sich die Kettenbruchentwicklung tatsächlich gemäß diesem Muster fortsetzt.

Beispiel 6.4. Anders sieht die Kettenbruchentwicklung von π aus.
Sei $x = \pi$ und $\alpha = \pi - 3 = 0,1415926\ldots$, dann erhält man

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots].$$

Hier ist keine Regelmäßigkeit bekannt.

6.2 Näherungsbrüche

Definition 6.1. *Einen Kettenbruch*

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

nennt man den n-te Näherungsbruch von $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n + A^n x]$.

Die n-ten Näherungsbrüche können rekursiv berechnet werden, dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 6.3 (Rekursionsformel für Näherungsbrüche)**.** *Sei $x \in (0,1)$, $A^{n-1}x \neq 0$ und die a_n's die Kettenbruchziffern von x. Wir setzen*

$$\begin{aligned} p_{-1} &:= 1, & p_0 &:= 0 \\ q_{-1} &:= 0, & q_0 &= 1 \end{aligned}$$

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_n &:= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &:= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$x = \frac{p_n + p_{n-1}A^n x}{q_n + q_{n-1}A^n x} \qquad \textit{und weiters ist} \qquad [a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Beweis. (aus [9, Satz 8.6])
Wir beweisen diesen Satz wieder mit vollständiger Induktion nach n. Der Induktionsanfang mit $n = 0$ ist erfüllt, da

$$\frac{p_0 + p_{-1}x}{q_0 + q_{-1}x} = \frac{x}{1} = x.$$

Wir nehmen an es gilt $A^n x \neq 0$ und

$$x = \frac{p_n + p_{n-1}A^n x}{q_n + q_{n-1}A^n x}. \tag{6.6}$$

Aus der Gleichung (6.3) wissen wir, dass folgender Zusammenhang gilt

$$A^n x = \frac{1}{a_{n+1} + A^{n+1}x}.$$

Setzen wir dies nun in (6.6) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_n + p_{n-1}\dfrac{1}{a_{n+1} + A^{n+1}x}}{q_n + q_{n-1}\dfrac{1}{a_{n+1} + A^{n+1}x}} \\ &= \frac{a_{n+1}p_n + p_n A^{n+1}x + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_n A^{n+1}x + q_{n-1}} \\ &= \frac{p_{n+1} + p_n A^{n+1}x}{q_{n+1} + q_n A^{n+1}x}. \end{aligned}$$

Damit wir den n-ten Näherungsbruch erhalten, setzen wir $A^n x = 0$ in

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n + A^n x] = \frac{p_n + p_{n-1}A^n x}{q_n + q_{n-1}A^n x}$$

ein, und erhalten

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Somit haben wir die Rekursionsformel für Näherungsbrüche bewiesen.

□

Beispiel 6.5. Wir wollen in diesem Beispiel die Näherungsbrüche des Kettenbruchs $[2,4,6,12]$ mit Hilfe der Rekursionsformel berechnen.

$$\begin{aligned}
p_{-1} &= 1,\ p_0 = 0 \\
q_{-1} &= 0,\ q_0 = 1 \\
p_1 &= a_1 p_0 + p_{-1} = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\
q_1 &= a_1 q_0 + q_{-1} = 2 \cdot 1 + 0 = 2 && \Rightarrow [a_1] = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2} \\
p_2 &= a_2 p_1 + p_0 = 4 \cdot 1 + 0 = 4 \\
q_2 &= a_2 q_1 + q_0 = 4 \cdot 2 + 1 = 9 && \Rightarrow [a_1, a_2] = \frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{9} \\
p_3 &= a_3 p_2 + p_1 = 6 \cdot 4 + 1 = 25 \\
q_3 &= a_3 q_2 + q_1 = 6 \cdot 9 + 2 = 56 && \Rightarrow [a_1, a_2, a_3] = \frac{p_3}{q_3} = \frac{25}{56} \\
p_4 &= a_4 p_3 + p_2 = 12 \cdot 25 + 4 = 304 \\
q_4 &= a_4 q_3 + q_2 = 12 \cdot 56 + 9 = 681 && \Rightarrow [a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{p_4}{q_4} = \frac{304}{681}
\end{aligned}$$

Beispiel 6.6. Die Näherungsbrüche für die Eulersche Zahl e ergeben sich wie folgt. Ist $\alpha = e - 2$, dann ist $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 4, \ldots$ und somit

$$\frac{p_1}{q_1} = 1, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{p_4}{q_4} = \frac{5}{7}, \qquad \frac{p_5}{q_5} = \frac{23}{32}, \ldots .$$

Für die Näherungsbrüche von $e = 2 + \alpha \approx 2 + \frac{p_n}{q_n}$ mit $n \in \{1,2,3,4,5\}$ erhält man also

$$e \approx \frac{3}{1} = 3, \quad e \approx \frac{8}{3} \approx 2,6666667, \quad e \approx \frac{11}{4} = 2,75, \quad e \approx \frac{19}{7} \approx 2,7142857, \quad e \approx \frac{87}{32} = 2,71875.$$

Als nächstes betrachten wir einige Eigenschaften im Zusammenhang mit Näherungsbrüchen.

Satz 6.4. *Es gilt*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}, \ \textit{und} \tag{6.7}$$

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = a_n (-1)^n. \tag{6.8}$$

Beweis. (aus [9, Satz 8.8 (2. und 5.)])

Wir beweisen (6.7) mit vollständiger Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ ist klar, da $p_0 q_{-1} - p_{-1} q_k = -1$. Mit der Induktionsannahme und der Definition der p_n's und q_n's gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-2} q_{n-1} - a_n p_{n-1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} \\
&= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\
&= -(-1)^n = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist (6.7) bewiesen.

Wegen der Definition von p_n und q_n in Satz 6.3 gilt auch $a_n = \dfrac{q_n - q_{n-2}}{q_{n-1}}$.

Nun zu (6.8), es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \\
&= \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} + \frac{p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}}{q_{n-1} q_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_{n-2}} \\
&= \frac{q_{n-2}(-1)^{n-1} + q_n(-1)^n}{q_n q_{n-1} q_{n-2}} \\
&= \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-2}} \frac{(q_n - q_{n-2})}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-2}} a_n
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Multipliziert man jetzt noch beide Seiten mit $q_n q_{n-2}$, dann erhält man (6.8) und der Satz ist somit bewiesen.

□

Proposition 6.5. Es gilt, $\mathrm{ggT}(p_n, q_n) = 1$.

Beweis. (aus [9, Satz 8.8 (3.)])
Sei $d = \mathrm{ggT}(p_k, q_k)$. Aus der Beziehung (6.7), also $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$, folgt, dass d ein Teiler von 1 sein muss und es gilt daher $d = 1$.

□

Satz 6.6. *Die Folge der Näherungsbrüche* $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})_{n \geq 0}$*, also mit geraden Indizes, ist streng monoton steigend, die Folge* $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})_{n \geq 0}$ *mit ungeraden Indizes, ist streng monoton fallend und jeder Näherungsbruch mit geraden Indizes ist kleiner als jeder Näherungsbruch mit ungeraden Indizes.*

Beweis. (aus [14, Theorem 152, 153])
Aus der Beziehung (6.8)

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-2}} a_n,$$

folgt für gerade Indizes n

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

Da $q_n q_{n-2} > 0$ und $a_n > 0$, gilt

$$\frac{p_n}{q_n} > \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}.$$

Für den Fall, dass n ungerade ist gilt

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{-a_n}{q_n q_{n-2}},$$

womit die Differenz immer negativ ist und es gilt

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}.$$

Dividiert man beide Seiten von (6.7) durch $q_n q_{n-1}$ erhält man $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ für $n > 0$. Da $q_n q_{n-1} > 0$ ist, ergibt sich daraus, dass

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_4}{q_4} \dots.$$

Daraus folgt, dass jeder Näherungsbruch mit geradem Index kleiner ist, als jeder Näherungsbruch mit ungeradem Index.

□

Korollar 6.1. Mit Satz 6.6 wurde mitunter auch gezeigt, dass zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche den Wert x des Kettenbruchs einschließen.

Beispiel 6.7. Die Näherungsbrüche für $x = [24, 6, 12] = \frac{304}{681}$ wurden in Beispiel (6.5) bereits berechnet und lauten

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2} = 0,5, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{4}{9} \approx 0,444444, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{25}{56} \approx 0,446428, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{304}{681} \approx 0,446402.$$

Es ist offensichtlich, dass $\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{304}{681}$ von jeweils zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen eingeschlossen wird.

Satz 6.7. *Sei $x \in (0,1)$. Der Abstand zwischen dem Wert eines Kettenbruches zum n-ten Näherungsbruch, lässt sich abschätzen mit*

$$\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Beweis. (aus [9, Satz 8.8 (7.)])
Mit Satz 6.3 gilt,

$$\begin{aligned}
\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{p_n + p_{n-1}A^n x}{q_n + q_{n-1}A^n x} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\
&= \left|\frac{p_n q_n + p_{n-1} q_n A^n x - p_n q_n - p_n q_{n-1} A^n x}{q_n^2 + q_n q_{n-1} A^n x}\right| \\
&= \left|\frac{-A^n x (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)}{q_n^2 + q_n q_{n-1} A^n x}\right| \\
&= \left|\frac{(-1)^n A^n x}{q_n^2 + q_n q_{n-1} A^n x}\right| \\
&= \frac{1}{q_n(\frac{q_n}{A^n x} + q_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{q_n}{A^n x} + q_{n-1} \geq \left\lfloor \frac{1}{A^n x} \right\rfloor q_n + q_{n-1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} = q_{n+1},$$

daraus folgt

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Es ist

$$\frac{q_n}{A^n x} + q_{n-1} < \left\lfloor \frac{1}{A^n x} \right\rfloor q_n + q_n + q_{n-1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} + q_n = q_{n+1} + q_n,$$

daraus folgt

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}.$$

□

Proposition 6.8. Es gilt $q_n \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. (aus [9, Satz 8.8 (4.)])
Wir verwenden für diesen Beweis vollständige Induktion nach n. Der Induktionsanfang gilt, da $q_1 = a_1 \geq 1$ und $q_2 = a_2 q_1 + q_0 = a_1 a_2 + 1 \geq 2$. Für $n \geq 3$ gilt mit der Definition von q_n und der Induktionsannahme

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq n - 1 + n - 2 \geq 2n - 3 \geq n.$$

□

Satz 6.9. *Sei $x \in (0,1)$. Für den Grenzwert der Näherungsbrüche gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Beweis. (aus [9, Korollar 8.9])
Da laut Proposition 6.8 $q_n \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| \leq \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Also konvergiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ gegen x.

□

6.3 Anwendung: Schaltregeln für den Gregorianischen Kalender

Wir wollen nun im folgenden Beispiel das Problem aus Kapitel 3.4.1 mit Hilfe von Kettenbrüchen lösen. Wie wir bereits wissen, dauert ein tropisches Jahr in etwa 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 45 Sekunden oder auch $365 + 104629/432000 \approx 365{,}242196759$ Tage. Um einen Kalender erstellen zu können, muss daher ein Gesetz für den Wechsel von Gemein- und Schaltjahren gefunden werden.

Sei $\alpha = 104629/432000 \approx 0{,}242196759$, q die Anzahl der Gemeinjahre und p die Anzahl der Schaltjahre. Wir suchen also genügend kleine ganze Zahlen p und q, so dass die Zahl $\beta = q\alpha - p$ möglichst klein ist. Entwickelt man $\alpha \approx 0{,}242196759$ Tage in einen Kettenbruch, erhält man

$$\alpha = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{170}}}}}}}} = [4,7,1,3,6,2,1,170].$$

Die Näherungsbrüche lauten wie folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{p_0}{q_0} = 0, && \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4}, && \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{29}, \\
&\frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{33}, && \frac{p_4}{q_4} = \frac{31}{128}, && \frac{p_5}{q_5} = \frac{194}{801} \\
&\frac{p_6}{q_6} = \frac{419}{1730}, && \frac{p_7}{q_7} = \frac{613}{2531}, && \frac{p_8}{q_8} = \frac{104629}{432000}.
\end{aligned}$$

Das tropische Jahr wurde für den Julianischen Kalender mit dem Näherungsbruch $365+\frac{p_1}{q_1} = 365+\frac{1}{4}$ schon gut angenähert, weshalb jedes vierte Jahr ein Schaltjahr war.

Eine bessere Näherung bekommt man mit dem fünften Näherungsbruch $365+\frac{p_5}{q_5} = 365+\frac{194}{801} \approx 365+\frac{194}{800} = 365+\frac{97}{400}$. Damit haben wir also eine sehr gute Näherung gefunden. Die Anzahl der Schaltjahre $p = 97$ und die Anzahl der Gemeinjahre $p = 400$ ergeben also unseren Gregorianischen Kalender. Von 400 Jahren sind also 303 gewöhnliche und 97 Schaltjahre. Der absolute Fehler zum tatsächlichen Bruch ergibt sich zu

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{104629}{432000} - \frac{194}{800}\right| \approx 0,000303241.$$

Mit dem vierten Näherungsbruch, also $p = 31$ und $q = 128$, hätte man eine noch bessere Lösung gefunden. Der absolute Fehler beträgt nämlich

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{104629}{432000} - \frac{31}{128}\right| \approx 0,000009259.$$

Ein 128-jähriger Zyklus wäre aber, im Vergleich zum 400-jährigen Zyklus, sehr unpraktisch.

7 Die Gauß'sche Osterformel

In diesem Kapitel wollen wir mit dem Wissen der vorherigen Kapitel eine Formel zur Bestimmung des Osterfestes ausarbeiten. Die Gauß'sche Osterformel wurde 1800 erstmals von Johann Carl Friedrich Gauß veröffentlicht. Für folgende Ausarbeitung wurde als Literatur die Zeitschrift für Mathematik und Physik, Kapitel VII, „Die Berechnung des christlichen Osterfestes" von Dr. Hermann Kinkelin (siehe [15]), verwendet.

7.1 Die Märzsonntage

Da Ostern frühestens am 22. März, spätestens am 25. April, stattfinden kann und noch dazu auf einen Sonntag fällt, müssen wir zunächst eine Formel zur Berechnung der Sonntage eines Jahres finden. Ein Gemeinjahr mit 365 Tagen besteht aus 52 Wochen + 1 Tag und ein Schaltjahr aus 52 Wochen + 2 Tagen. Die Wochentage rücken also, im Vergleich zum vorherigen Jahr, nach einem Gemeinjahr um eine Stelle und nach einem Schaltjahr um zwei Stellen, vorwärts. Der 1. Jänner 2016 war zum Beispiel ein Freitag, da 2016 ein Schaltjahr war, springt er im nächstes Jahr zwei Tage vorwärts und ist im Jahre 2017 ein Sonntag. Umgekehrt springen natürlich die Sonntage um entweder eine oder zwei Stellen zurück.

Im Jahre 0 des Julianischen Kalenders[3] fiel der erste Sonntag auf den 4. Jänner. Da dieses Jahr ein Schaltjahr war, fielen die Sonntage nach dem Schalttag (25. Februar) auf den 7., 14., 21., 28. März usw. Die Sonntagsdaten sind also Vielfache von 7 und wir schreiben ganz allgemein $7u$ mit $u \in \mathbb{Z}$. Die nächsten drei Jahre, also die Jahre 1, 2 und 3, sind Gemeinjahre und die Sonntage rücken somit im Datum um je eine Stelle zurück und die Sonntagsdaten ergeben sich zu $7u - 1, 7u - 2, 7u - 3$. Das Jahr 4 war wieder ein Schaltjahr, weshalb das Datum der Sonntage, ab dem 25. Februar, um zwei Einheiten kleiner wird, also $7u-5$. Darauf folgen wieder drei Gemeinjahre und das Datum ergibt sich zu $7u - 6, 7u - 7, 7u - 8$.

Führt man diese Überlegung weiter, lässt sich schnell ein allgemeiner Ausdruck für die

[3]Das Jahr 0 im Julianischen Kalender, entspricht dem Jahr 1 v. Chr. laut christlicher Zeitrechnung. Nach dem Jahr 1 v. Chr. begann das Jahr 1 n. Chr.

Sonntage S eines julianischen Jahres j ab dem 25. Februar finden.

$$S = \left(7u - \left(j + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor\right)\right)^{\text{ter}} \text{ März}, \tag{7.1}$$

wobei u so zu wählen ist, dass S positiv wird. Weiters ist der 32. März der 1. April usw.

Beispiel 7.1. Die Sonntage nach dem 25. Februar im Jahr $j = 1581$, also ein Jahr vor der Kalenderreform, lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$S = 7u - \left(1581 + \left\lfloor \frac{1581}{4} \right\rfloor\right) = 7u - 1976$$

Das kleinste positive S bekommt man für $u = 283$ und somit ist $S = 5$. Der erste Märzsonntag im Jahre 1581 war also der 5. März. Die folgenden Sonntage haben also das Datum des 12. März, 19. März usw.

Wir führen nun die Größen $b \equiv j \pmod 4$ und $c \equiv j \pmod 7$ ein, wobei j das gegebene Jahr ist, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $c \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Das heißt, es gibt ein $x, y \in \mathbb{Z}$ und es gilt

$$j = 4x + b = 7y + c. \tag{7.2}$$

Daraus folgt

$$x = \frac{7y - b + c}{4} = 2y - \frac{y + b - c}{4}.$$

Da $x \in \mathbb{Z}$ gibt es also ein $z \in \mathbb{Z}$ sodass

$$z = \frac{y + b - c}{4} \Leftrightarrow y = 4z - b + c.$$

Setzt man nun y in die Formel (7.2) für j ein, erhalten wir

$$j = 28z - 7b + 8c = 28z - 8b + 8c + b$$

und damit folgt

$$\left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{28z - 8b + 8c + b}{4} \right\rfloor = 7z - 2b + 2c.$$

Setzen wir nun in die Formel (7.1) ein, ergibt sich der allgemeine Ausdruck bezüglich der

Sonntage zu

$$\begin{aligned} S &= 7u - \left(j + \left\lfloor \frac{j}{4} \right\rfloor\right) \\ &= 7u - (28z - 7b + 8c + 7z - 2b + 2c) \\ &= 7u - 35z + 9b - 10c \\ &= 7u - 35z + 7b + 2b + 4c - 14c \\ &= 7v + 2b + 4c, \end{aligned} \tag{7.3}$$

wobei $v = u - 5z + b - 2c \in \mathbb{Z}$. Die Märzsonntage S eines Jahres j finden also ab dem 25. Februar am

$$(7v + 2b + 4c)^{\text{ten}}\text{März}$$

statt. Diese Formel ist aber nur für den Julianischen Kalender gültig und muss für den Gregorianischen korrigiert werden.

Die Kalenderreform 1582 brachte zwei gravierende Änderungen mit sich. Zum einen wurden im Oktober 1582 10 Tage = 1 Woche + 3 Tage ausgelassen, so dass auf den 4. Oktober sofort der 15. folgte, um das verschobene Frühlingsäquinoktium wieder auf den 21. März zu bringen. Aufgrund dieser Änderung rückten die Sonntage des gregorianischen Jahres um drei Tage vorwärts (die Folge der Wochentage wurde nicht verändert). Zum anderen wurde die Schaltregel modifiziert und eine Änderung bei den Säkularjahren eingeführt. Die Säkularjahre sind nur mehr Schaltjahre, wenn sich die Jahreszahl ohne Rest durch 400 teilen lässt. Der Schalttag wird also weggelassen, wenn die Säkularzahl $s = \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor$ nicht durch 4 teilbar ist und das Datum rückt in diesem Fall jeweils nur um eine Einheit vor. Berücksichtigt man diese Änderungen, muss die Formel für die Sonntage im Julianischen Kalender mit einem Summand g, wobei

$$g = 3 + (s - 16) - \left\lfloor \frac{s - 16}{4} \right\rfloor = s - \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor - 9,$$

korrigiert werden.

Werden 10 Tage = 1 Woche + 3 Tage im Kalender ausgelassen, rückt das Datum um 3 Einheiten nach vor. Folglich ergibt sich der erste Term der Korrektur g zu 3. Die erste Änderung in den Säkularjahren, nach der Kalenderreform 1582, konnte im Jahre 1600 erfolgen, deshalb wird die Korrektur erst ab der Säkularzahl $s = 16$ berücksichtigt. Da das Jahr 1600 im Julianischen Kalender ein Schaltjahr war und die Säkularzahl 16 ohne Rest durch 4 teilbar ist, bleibt das Jahr auch im Gregorianischen Kalender ein Schaltjahr und es ändert sich, zusätzlich zur Verschiebung um 3 Tage, nichts. Die nächsten drei Säkularjahre 1700, 1800 und 1900 wären im Julianischen Kalender ein Schaltjahr, sind aber nicht durch 400 ohne Rest teilbar. Somit wird im Gregorianischen Kalender jeweils ein Schalttag weggenommen und das Datum hüpft um je eine Einheit nach vor. Das Jahr 2000 ist jedoch wieder ein Schaltjahr im Julianischen und im Gregorianischen Kalender, deshalb verändert sich zusätzlich im Datum nichts. So lassen sich die zwei letzten Terme der Korrektur g erklären.

Als nächstes führen wir nun die Zahl $n = g + 6$ ein und setzen

$$q = \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor$$

um die Osterformel möglichst einfach gestalten zu können. Folglich ist

$$n = g + 6 = s - q - 3 \equiv s - q + 4 \pmod 7. \tag{7.4}$$

Das Datum der Sonntage ab dem 25. Februar im Gregorianischen Kalender aus (7.3) wird damit korrigiert zu

$$S = 7v + 2b + 4c + n - 6 \tag{7.5}$$

und die Sonntage finden am $S = (7v + 2b + 4c + n - 6)^{\text{ten}}$ März statt.

Wie oben bereits erwähnt, fiel der erste Sonntag im Jahre 0 auf den 4. Jänner und der erste Sonntag nach dem Schalttag auf den 7. März. Das Datum hat sich also um drei Einheiten verändert. Will man nun das Datum der Sonntage S' vom 1. Jänner bis zum 24. Februar in einem Schaltjahr wissen, muss man von der Sonntagsformel (7.5) drei abziehen und man erhält folgende Formel

$$S' = 7v + 2b + 4c + n - 6 - 3 = 7v_1 + 2b + 4c + n + 5,$$

wobei $v_1 = v - 2 \in \mathbb{Z}$.

Das Datum der Sonntage rückt dann für ein Gemeinjahr im Vergleich zum Schaltjahr um eine Stelle zurück und ergibt sich zu

$$S' = (7v_1 + 2b + 4c + n + 4)^{\text{te}} \text{ Jänner}. \tag{7.6}$$

Möchte man den ersten Sonntag im Jahre j wissen, so ist das Datum gleich dem $(S' \mod 7)^{\text{ten}}$

Jänner. Also in einem Schaltjahr ist der erste Sonntag im Jahr am

$$((2b + 4c + n + 5) \mod 7)^{\text{ten}} \text{ Jänner} \tag{7.7}$$

und in einem Gemeinjahr am

$$((2b + 4c + n + 4) \mod 7)^{\text{ten}} \text{ Jänner}, \tag{7.8}$$

wobei wieder zu beachten ist, dass der 32. Jänner = 1. Februar ist usw. Setzt man $g = 0$ bzw. $n = 6$, dann gelten die Formeln (7.5), (7.7) und (7.8) auch für den Julianischen Kalender.

Beispiel 7.2. Wir wollen nun für das Schaltjahr $j = 2020$ den ersten Sonntag im Jänner berechnen. Dazu benötigen wir die Werte b, c, n, s und q:

$$\begin{aligned} b &\equiv 2020 \pmod 4 \equiv 0 \pmod 4), & c &\equiv 2020 \pmod 7 = 4 \pmod 7), \\ s &= \left\lfloor \frac{2020}{100} \right\rfloor = 20, & q &= \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor = 5, \\ n &\equiv (4 + 20 - 5) \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

Der erste Sonntag S_1 im Schaltjahr 2020 ist also am

$$S_1 \equiv (2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 5 + 5) \pmod 7 \equiv 26 \pmod 7 \equiv 5 \mathrel{\widehat{=}} 5. \text{ Jänner}. \tag{7.9}$$

7.2 Der Ostervollmond

Bis jetzt haben wir eine Formel für die Sonntagsdaten in einem Jahr gefunden. Als nächstes müssen wir herausfinden, wann der Ostervollmond (Frühlingsvollmond) eintritt, um danach das Datum des Osterfestes berechnen zu können.

Es wird vermutet, dass bereits beim ersten Konzil von Nicäa im Jahr 325 n.Chr. die Regeln für das Osterfest bestimmt wurden. Ostern soll auf den Sonntag nach dem ersten Vollmond, am oder nach dem Frühlingsbeginn am 21. März, stattfinden. Das Osterfest ist somit allein eine kirchliche Festlegung und folgt nicht der Astronomie. Deshalb unterscheidet man zwischen kirchlichem und astronomischem Vollmond. Zu einer exakten astronomischen Bestimmung des Osterfestes war man zu dieser Zeit noch nicht in der Lage und der kirchliche Neumond wurde anhand von Tabellen, welche auf den Metonischen Zyklus basierten, bestimmt. Der kirchliche Vollmond wurde als der 14. Tag nach einem kirchlichen Neumond definiert. Der astronomische Vollmond hingegen, tritt entweder 14 oder 15 Tage nach dem astronomischen Neumond ein. Heute werden die kirchlichen Neumonde und daraus die kirchlichen Vollmonde mit Hilfe des Metonischen Zyklus berechnet. Der Metonische Zyklus wiederholt sich alle 19 julianische Jahre, was etwa 235 synodischen Monaten entspricht. Die Differenz zwischen zyklischer und wahrer Mondbewegung ergibt sich zu einem ganzen Tag in etwa 310 Jahren (siehe Kapitel 3.3.2) und wird bei der Osterberechnung auch berücksichtigt.

Die Zeitspanne von einem Frühlingsvollmond zum nächsten wird ein Mondjahr genannt. Die Zeiträume von einem Neumond zum nächsten heißen Mondmonate. Diese Mondmonate haben mit den Monaten Jänner, Februar, März usw. nichts zu tun, hier geht es nur um die Mondphasen.

Die 235 Monate werden im Julianischen Kalender folgendermaßen verteilt. Die Mondmonate erhalten abwechselnd 30 und 29 Tage, wenn man vom ersten Neumond des ersten Jahres im 19-jährigen Zyklus, ausgeht. Kommen in einem Jahr 13 Neumonde vor, dann wird nach dem 13. Neumond ein Mondmonat von 30 Tagen eingeschaltet und am Ende des 19. Jahres hat der Mondmonat dann aber nur 29 Tage. Der Februar wird immer als Monat mit 28 Tagen gezählt, aber in den Schaltjahren wird derjenige Mondmonat in welchem der Schalttag fällt, in Wirklichkeit um einen Tag vergrößert.

Es gibt also 12 kurze Mondjahre mit je 12 Mondmonaten und 7 lange Mondjahre zu je 13 Mondmonaten bzw. 115 synodische Monate zu 29 und 120 synodische Monate zu 30 Tagen. Eine genauere Beschreibung und Tabelle findet man in Kapitel 3.2.5, Tabelle (3.5).

Ein kurzes Mondjahr hat also sechs Mondmonate zu je 29 Tagen und sechs Mondmonate zu je 30 Tagen was gesamt $6 \cdot 29 + 6 \cdot 30 = 354$ Tage ergibt. Da $365 - 354 = 11$, springt das Datum des Ostervollmondes um 11 Tage zurück. Ein langes Mondjahr besteht aus sechs Mondmonate zu je 29 Tagen und sieben Mondmonate zu je 30 Tagen, also $6 \cdot 29 + 7 \cdot 30 = 384$ Tagen. Das Datum des Vollmondes springt somit um 19 Tage vor, da $384 = 365 + 19$. Einzige Ausnahme ist das letzte Jahr des 19-jährigen Zyklus, hier springt das Datum um $365 - 353 = 12$ Tage zurück, da dieses Jahr sieben Mondmonate zu je 29 Tagen und fünf Mondmonate zu 30 Tagen besitzt.

Die Nummer eines Jahres in einem Metonischen Zyklus wird als *Goldene Zahl G* bezeichnet und ist definiert als

$$G = a + 1 \tag{7.10}$$

mit

$$a \equiv j \pmod{19}, \tag{7.11}$$

wobei $a \in \{0, 1, \ldots, 18\}$. Diejenigen Jahre mit Goldenen Zahlen $G = 2, 5, 7, 10, 13, 16$ und 18 sind lange Mondjahre, die anderen kurze.

Wir wählen als das erste Jahr eines solchen Zyklus das Jahr 0, in welchem der 23. März ein Neumond war und somit der erste Neumond des Jahres am 23. Jänner stattfand. Das Datum des ersten Neumondes, in jedem folgenden Jahr innerhalb eines Zyklus, rückt um 19 Tage vor und fällt nach 19 Jahren wieder auf den gleichen Tag. Das Datum des ersten Neumondes eines Jahres j muss dann gleich dem

$$(23 + 19a - 30w)^{\text{ten}} \text{ Jänner}$$

sein, mit $w \in \mathbb{Z}$ und w ist so zu wählen, dass der Ausdruck positiv und < 30 ist. Der Ausdruck ist auch kongruent zu

$$23 + 19a \pmod{30}.$$

Der erste Monat jeden Jahres, innerhalb eines 19-jährigen Zyklus, erhält 30 Tage, der zweite 29, der dritte wieder 30 usw. Der dritte Neumond des Jahres findet also 59 Tage später als der erste statt. Der vierte Neumond dann 30 Tage später als der dritte. Da nun die kirchlichen Vollmonde 13 Tage später als die kirchlichen Neumonde auftreten, tritt der Ostervollmond bzw. die Ostergrenze OG 13 Tage nach dem dritten oder vierten Neumond ein und hat das Datum des

$$((23 + 19a) \bmod 30) + 13 \quad \text{oder} \quad ((23 + 19a) \bmod 30) + 13 + 30 \text{ März}.$$

Die Differenz zwischen dem 21. März und dem des Ostervollmondes soll aber weniger als 30 Tage betragen, darum ist in beiden Fällen das Datum der julianischen Ostergrenze der

$$21 + ((23 + 19a + 13 - 21) \pmod{30}) \text{ März}$$

oder

$$OG = (21 + r)^{\text{ter}} \text{ März} \tag{7.12}$$

mit

$$r \equiv 19a + 15 \pmod{30}, \tag{7.13}$$

wobei $r \in \{0, 1, \dots, 29\}$. Es gibt drei wesentliche Punkte, die für den ewigen Kalender gelten, welche durch die sinnvolle Kombination von abwechselden Monaten von 30 und 29 Tagen und dem Einschalten eines Monats, am Ende eines Zyklus, gewährleistet werden.

1. Die in einem 19-jährigen Zyklus auftretende Neumonde fallen im folgenden Zyklus wieder auf die selben Tage.

2. Das erste Mondmonat in einem Mondjahr hat immer 30 Tage.

3. Das vierte Mondmonat eines Mondjahres hat ebenfalls 30 Tage, falls der dritte Vollmond vor dem 21. März eintritt.

Es gibt zwei Ausnahmen welche die 3. Bestimmung betreffen:

(a) Fällt der vierte Neumond auf den 6. April (der Vollmond also auf den 19. April), so wird der Neumond auf den 5. April zurückgesetzt.

(b) Fällt der vierte Neumond auf den 5. April (der Vollmond also auf den 18. April) und ist gleichzeitig die goldene Zahl $G > 11$ bzw. $a > 10$, wird er auf den 4. April zurückverlegt.

Um die Tradition des Julianischen Kalenders, nämlich dass Ostern spätestens am 25. April gefeiert wird, aufrecht zu erhalten, wurde die erste Ausnahmeregel eingeführt. Die zweite Ausnahmeregel verhindert, dass das Osterdatum, innerhalb eines Metonischen Zyklus, zweimal auf den selben Kalendertag fällt [16].

Wegen der Umstellung vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender, müssen wir aber wieder Korrekturen vornehmen. Wie oben bereits erwähnt, sind 19 julianische Jahre um etwa 0,0613 Tage länger als 235 synodische Monate, was in ungefähr 310 Jahren einen ganzen Tag ausmacht. Von der Einführung der christlichen Zeitrechnung ca. 544 bis zum Gregorianischen Kalender 1582 sind 1038 Jahre vergangen, was einen Unterschied der kirchlichen und astronomischen Neumonde von 3 Tagen macht. Damit das Datum der Neumonde wieder übereinstimmt, verminderte man es zunächst um 3 Einheiten und das Datum des ersten Neumondes eines Jahres j war somit der

$$(23 + 19a - 3) \mod 30 \mathrel{\widehat{=}} ((20 + 19a) \mod 30)^{\text{te}} \text{ Jänner.}$$

Berücksichtigt man nun auch noch die Auslassung von 10 Tagen im Oktober 1582, dann ergibt sich das Datum zu

$$(30 + 19a) \mod 30 \mathrel{\widehat{=}} (19a \mod 30) \text{ Jänner.}$$

Jetzt können wir genau wie beim Julianischen Kalender die Ostergrenze OG für den Gregorianischen Kalender aufstellen:

$$OG \equiv 21 + (19a + 13 - 21) \pmod{30} \equiv 21 + 19a + 22 \pmod{30}$$

Wieder zu beachten ist, dass die kirchlichen Vollmonde 13 Tage nach den kirchlichen Neumonde eintreten und dass die Differenz zwischen dem 21. März und dem Ostervollmond weniger als 30 Tage betragen. Die beiden oben erwähnten Ausnahmen müssen auch wieder berücksichtigt werden.

Um eine allgemein gültige Formel für den julianischen und gregorianischen Ostervollmond aufstellen zu können, setzen wir

$$OG = (21 + d)^{\text{ter}} \text{ März} \tag{7.14}$$

mit

$$d \equiv 19a + m \pmod{30}, \tag{7.15}$$

wobei $d \in \{0, 1, \ldots, 29\}$. Für den Julianischen Kalender ist $m = 15$ und im Gregorianischen von 1582 bis 1599 $m = 22$. Die Formel (7.14) gilt nur von 1582 bis 1599 mit $m = 22$ für den Gregorianischen Kalender, da die neue Schaltregel noch nicht berücksichtigt wurde. Deshalb müssen bei der Zahl d bzw. der Zahl m im Gregorianischen Kalender zwei Korrekturen durchgeführt werden, welche die Sonnen- und die Mondgleichung genannt werden.

7.2.1 Die Sonnengleichung

Die Sonnengleichung dient dazu, das Kalenderjahr besser an das Sonnenjahr anzupassen. Da bei den Säkularjahren der Schalttag weggelassen wird, wenn die Säkularzahl s nicht durch 4 ohne Rest teilbar ist, rückt das Datum des Ostervollmondes bei jeder Weglassung um einen Tag vor. Genau wie bei den Sonntagsdaten die Korrektur g vorgenommen werden musste, muss hier die Sonnengleichung oder Sonnenkorrektur Sk zu m addiert werden. Die Sonnenkorrektur ist also

$$Sk = (s - 16) - \left\lfloor \frac{s - 16}{4} \right\rfloor = s - q - 12. \tag{7.16}$$

Die Sonnenkorrektur wird in 400 Jahren drei mal angewendet und sorgt dafür, dass der astronomische Frühlingsbeginn annähernd der 21. März bleibt. Bei jeder Anwendung der Sonnenkorrektur muss dies gleichzeitig mit der Mondgleichung ausgeglichen werden. In manchen Säkularjahren muss sowohl die Sonnen- als auch die Mondkorrektur angewendet werden und beide heben sich gegenseitig auf.

7.2.2 Die Mondgleichung

Die Mondgleichung hilft dabei, die zyklische Mondbewegung der wahren Mondbewegung anzugleichen. Wie bereits mehrfach erwähnt, beträgt die Differenz von 19 julianischen Jahren und 235 synodischen Monaten etwa 0,0613 Tage, was einen ganzen Tag in etwa 310 Jahren ergibt. In 2480 Jahren (ungefähr 2500 Jahre) müssen somit 8 Tage vom Datum des Ostervollmondes abgezogen werden.

Man teilt die 2500 Jahre in acht Gruppen ein, so dass die Mondgleichung in jeder folgenden Gruppe um eine Einheit größer wird als die vorherige, ausgehend von den Säkularjahren 1800, 4300, 6800 usw. Es gibt also sieben Gruppen zu je drei Jahrhunderten und nach ihnen eine Gruppe mit vier Jahrhunderten. Geht man zum Beispiel vom Säkularjahr 1800 aus, besteht die erste Gruppe aus den Jahren 1800, 1900, 2000 und die letzte Gruppe aus 3900, 4000, 4100 und 4200. Die Mondgleichung oder auch Mondkorrektur Mk wird nach jeder Gruppe um eins erhöht, siehe Tabelle (7.1).

Gruppe	Säkularjahre				Mk
1.	1800	1900	2000		
2.	2100	2200	2300		+1
3.	2400	2500	2600		+1
4.	2700	2800	2900		+1
5.	3000	3100	3200		+1
6.	3300	3400	3500		+1
7.	3600	3700	3800		+1
8.	3900	4000	4100	4200	+1

Tabelle 7.1: Einteilung der 2500 Jahre in acht Gruppen, ausgehend vom Säkularjahr 1800.

Die Mondkorrektur Mk hat demnach die Form

$$Mk = \left\lfloor \frac{\alpha + 8s}{25} \right\rfloor + \beta,$$

wobei die Konstanten α und β noch zu bestimmen sind. Der Ausdruck nimmt um 8 Einheiten zu wenn s um 25 größer wird und die Werte bilden abwechselnd sieben Gruppen von drei und eine von vier gleichen Zahlen, wenn s um je eins zunimmt.

Wir wollen zuerst die Konstante α bestimmen. Sie ergibt sich dadurch, dass eine Gruppe von vier Jahrhunderten vorhanden sein muss und Mk also 4 gleiche Werte, bei der Division der ersten Säkularzahl s dieser Gruppe, ausgeben muss. Es muss demzufolge gelten:

$$\alpha + 8s \equiv 0 \pmod{25}$$

bzw.

$$\alpha = 25\delta - 8s \;\text{ mit }\; \delta \in \mathbb{Z}.$$

Die erste Gruppe aus vier Jahrhunderten besteht aus den Säkularjahren 3900, 4000, 4100 und 4200. Wir setzen zunächst $s = 39$. Damit α den kleinsten positiven Wert annimmt, wählen wir $\delta = 13$, demnach wird $\alpha = 13$ und

$$Mk = \left\lfloor \frac{13 + 8s}{25} \right\rfloor + \beta.$$

Bei der ersten Anwendung der Mondkorrektur im Jahre 1800 mit $s = 18$, hatte die Mondgleichung Mk den Wert 1 womit β berechnet werden kann und sich zu $\beta = -5$ ergibt.

Die Mondgleichung lässt sich also folgendermaßen schreiben:

$$Mk = p - 5, \quad \text{mit} \quad p = \left\lfloor \frac{13 + 8s}{25} \right\rfloor \tag{7.17}$$

Setzt man die 25 Säkularjahre, ausgehend vom Jahr 1800, erhält man für die Mondkorrektur Mk folgende Werte:

s	18	19	20	21	22	23	24	...	39	40	41	42
Mk	1	1	1	2	2	2	3	...	8	8	8	8

Wendet man nun die Sonnen- und Mondgleichung an, ändert sich das Datum des gregorianischen Ostervollmondes mit

$$m \equiv 22 + Sk - Mk \pmod{30}$$

oder

$$m \equiv 15 + s - p - q \pmod{30}, \tag{7.18}$$

wobei $m \in \{0, 1, \dots, 29\}$.

Um eine ganz allgemein gültige Formel für das Osterdatum aufstellen zu können, wo auch die beiden Ausnahmefälle berücksichtigt werden, führen wir eine weitere Korrektur f ein. Ist

nämlich die Ostergrenze $OG = 19$. April $= 21 + 29$. März, wenn für $OG = 32$. März $= 1$. April usw. gilt, verschiebt sich das Datum des Ostervollmondes um einen Tag. Genau das selbe gilt auch wenn $OG = 18$. April $= 21 + 28$. März und $a > 10$ ist.
Wenn also $d = 29$ oder $d = 28$ und $a > 10$ muss die Formel (7.15) mit der Korrektur

$$f = \left\lfloor \frac{d + \lfloor \frac{a}{11} \rfloor}{29} \right\rfloor \tag{7.19}$$

ausgebessert werden, welche von d abgezogen wird.

Die Korrektur f ist nur in diesen beiden Ausnahmefällen $f = 1$, ansonsten $f = 0$.

7.3 Der Ostertag

Wir haben nun alle notwendigen Größen und können damit das Datum des Osterfestes eines bestimmten Jahres bestimmen. Der Ostertag wird also am ersten Sonntag nach dem Ostervollmond gefeiert, das heißt die Differenz D der Sonntagsdaten nach dem 25. Februar und der Ostergrenze muss zwischen 1 und 7 liegen. Folglich ist die Differenz D gleich

$$D = ((S - OG + 6) \mod 7) + 1. \tag{7.20}$$

Setzen wir nun S und OG aus den Formeln (7.5) und (7.14) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} D &= (((2b + 4c + n - 6 + 7v) - (21 + d) + 6) \mod 7) + 1 \\ &\equiv ((2b + 4c + n - d) \mod 7) + 1 \\ &\equiv ((2b + 4c + n + 6d) \mod 7) + 1 \end{aligned} \tag{7.21}$$

oder

$$D = e + 1 \tag{7.22}$$

mit

$$e \equiv 2b + 4c + n + 6d \pmod 7, \tag{7.23}$$

wobei $e \in \{0, 1, \dots, 6\}$.

Die Differenz D gibt die Anzahl der Tage an um welche das Osterfest nach dem Ostervollmond stattfindet. Das Datum des Ostersonntages P bekommen wir indem wir die Differenz zum Datum der Ostergrenze OG addieren,

$$P = (22 + d + e)^{\text{ter}} \text{ März} \tag{7.24}$$

oder, falls diese Zahl größer als 31 ist,

$$P = (d + e - 9)^{\text{ter}} \text{ April} \tag{7.25}$$

Es müssen natürlich noch die beiden bereits erwähnten Ausnahmefälle berücksichtigt werden:

(a) Fällt bei $d = 29$ das Osterdatum auf den 26. April, so muss es auf den 19. April gesetzt werden.

(b) Fällt bei $d = 28$ und $a > 10$ das Osterdatum auf den 25. April, so muss es auf den 18. April gesetzt werden.

Möchte man die zwei Ausnahmefälle nicht extra betrachten, gibt es eine allgemein gültige Formel für den Gregorianischen Kalender, bei welcher die Korrektur f bereits miteinbezogen wird:

$$P = (21 + (d - f) + e)^{\text{ter}} \text{ März} = ((d - f) + e - 9)^{\text{ter}} \text{ April} \tag{7.26}$$

mit

$$e \equiv 2b + 4c + n + 6(d - f) \pmod 7. \tag{7.27}$$

7.4 Zusammenfassung der Gauß'schen Osterformel

Fasst man nun alle Resultate zusammen, ergibt sich die berühmte Osterformel, welche von Johann Carl Friedrich Gauß im Jahre 1800 erstmals veröffentlicht wurde. Um das Osterdatum eines beliebigen gregorianischen Jahres j berechnen zu können, müssen der Reihe nach folgende Größen bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
a &\equiv j \pmod{19} & b &\equiv j \pmod{4} \\
c &\equiv j \pmod{7} & s &= \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor \\
p &= \left\lfloor \frac{13+8s}{25} \right\rfloor & q &= \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor \\
m &\equiv 15+s-p-q \pmod{30} & n &\equiv 4+s-q \pmod{7} \\
d &\equiv 19a+m \pmod{30} & e &\equiv 2b+4c+6d+n \pmod{7}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Osterdatum } P = (22+d+e)^{\text{ter}} \text{ März}
$$

(Der 32. März ist der 1. April usw.)

Ausnahmefälle:

(a) Fällt bei $d = 29$ das Osterdatum auf den 26. April, so muss es auf den 19. April gesetzt werden.

(b) Fällt bei $d = 28$ und $a > 10$ das Osterdatum auf den 25. April, so muss es auf den 18. April gesetzt werden.

Möchte man ein Osterdatum im Julianischen Kalender bestimmen, geht man wie beim Gregorianischen Kalender vor, jedoch ist in diesem Fall immer $m = 15$ und $n = 6$ zu setzen.

7.4.1 Allgemein gültige Formel für den Gregorianischen Kalender

Möchte man die beiden Ausnahmefälle nicht extra behandeln, gibt es die allgemein gültige Osterformel für den Gregorianischen Kalender. Hierzu muss der Korrekturfaktor f in den Ausdrücken für e und P von d subtrahiert werden.

$$
f = \left\lfloor \frac{d + \lfloor \frac{a}{11} \rfloor}{29} \right\rfloor \qquad e \equiv 2b+4c+6(d-f)+n \pmod{7}
$$

Osterdatum $P = (22 + (d - f) + e)^{\text{ter}}$ März

(Der 32. März ist der 1. April usw.)

7.5 Beispiele

Im folgenden Teil der Arbeit werden einige Beispiele zur Bestimmung des Osterfestes genau durchgerechnet. Im ersten Beispiel wird das Osterdatum eines julianischen Jahres berechnet. Die weiteren Beispiele zeigen die verschiedenen Berechnungen für den Gregorianischen Kalender, wo mitunter auch die zwei erwähnten Ausnahmefälle eintreten.

Beispiel 7.3. Wir berechnen nun an welchem Tag das Osterfest im Jahre 1581 stattfand. 1581 war noch vor der gregorianischen Kalenderreform, deshalb müssen wir die Osterformel für den Julianischen Kalender verwenden. Also setzen wir zunächst $j = 1581$, $m = 15$ und $n = 6$. Weiters ist

$$a \equiv 1581 \pmod{19} \equiv 4 \pmod{19}, \qquad b \equiv 1581 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{4},$$
$$c \equiv 1581 \quad \text{mod } 7 \equiv 6, \qquad s = \left\lfloor \frac{1581}{100} \right\rfloor = 15,$$
$$p = \left\lfloor \frac{13 + 8 \cdot 15}{25} \right\rfloor = 5, \qquad q = \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor = 3,$$
$$d \equiv 19 \cdot 4 + 15 \pmod{30} \equiv 1 \pmod{30},$$
$$e \equiv 2 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 6 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}.$$

Das Osterfest wurde also im Jahre 1581 gefeiert am

$$P = 22 + 1 + 3 = 26. \text{ März.}$$

Beispiel 7.4. In diesem Beispiel berechnen wir an welchem Tag das Osterfest im Jahre $j = 1870$, für den Gregorianischen Kalender, stattfand. Weiters ist

$$a \equiv 1870 \pmod{19} \equiv 8 \pmod{19}, \qquad b \equiv 1870 \pmod{4} \equiv 2 \pmod{4},$$
$$c \equiv 1870 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}, \qquad s = \left\lfloor \frac{1870}{100} \right\rfloor = 18,$$
$$p = \left\lfloor \frac{13 + 8 \cdot 18}{25} \right\rfloor = 6, \qquad q = \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor = 4,$$
$$m \equiv 15 + 18 - 6 - 4 \pmod{30} \equiv 23 \pmod{30},$$
$$n \equiv 4 + 18 - 4 \pmod{7} \equiv 4 \pmod{19},$$

$$d \equiv 19 \cdot 8 + 23 \pmod{30} \equiv 25 \pmod{30}, \qquad f = \left\lfloor \frac{25 + \left\lfloor \frac{8}{11} \right\rfloor}{29} \right\rfloor = 0$$

$$e \equiv 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 25 + 4 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}.$$

Das Osterfest wurde also im Jahre 1870 gefeiert am

$$P = 22 + 25 + 1 = 48.\ \text{März} = 17.\ \text{April}.$$

Beispiel 7.5. Folgendes Beispiel gibt die Berechnung für das Osterfest des Jahres $j = 2049$ für den Gregorianischen Kalender an. In diesem Fall tritt eine der Ausnahmeregeln ein, da $d = 28$ und $a > 10$. Es ist

$$a \equiv 2049 \pmod{19} \equiv 16 \pmod{19}, \qquad b \equiv 2049 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{4},$$

$$c \equiv 2049 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7}, \qquad s = \left\lfloor \frac{2049}{100} \right\rfloor = 20,$$

$$p = \left\lfloor \frac{13 + 8 \cdot 20}{25} \right\rfloor = 6, \qquad q = \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor = 5,$$

$$m \equiv 15 + 20 - 6 - 5 \pmod{30} \equiv 24 \pmod{30} \qquad n \equiv 4 + 20 - 5 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7},$$

$$d \equiv 19 \cdot 16 + 24 \pmod{30} \equiv 28 \pmod{30}, \qquad f = \left\lfloor \frac{28 + \left\lfloor \frac{16}{11} \right\rfloor}{29} \right\rfloor = 1$$

$$e \equiv 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot (28 - 1) + 5 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Im Jahre 2049 wird das Osterfest also gefeiert am

$$P = 22 + (28 - 1) + 0 = 49.\ \text{März} = 18.\ \text{April}.$$

Würde man in diesem Fall die Korrektur f nicht berücksichtigen, wäre $e = 6$, $P = 22+28+6 = 56$. März = 25. April und Ostern würde eine Woche zu spät gefeiert werden.

Beispiel 7.6. Dieses Beispiel gibt die Berechnung für das Osterfest des Jahres $j = 1981$ für den Gregorianischen Kalender an. In diesem Fall trat ebenfalls eine der Ausnahmeregeln ein. Es ist

$$a \equiv 1981 \pmod{19} \equiv 5 \pmod{19}, \qquad b \equiv 1981 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{4},$$

$$c \equiv 1981 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}, \qquad s = \left\lfloor \frac{1981}{100} \right\rfloor = 19,$$

$$p = \left\lfloor \frac{13 + 8 \cdot 19}{25} \right\rfloor = 6, \qquad q = \left\lfloor \frac{19}{4} \right\rfloor = 4,$$

$m \equiv 15 + 19 - 6 - 4 \pmod{30} \equiv 24 \pmod{30}$,

$n \equiv 4 + 20 - 5 \pmod{7} \equiv 5 \pmod{7}$,

$d \equiv 19 \cdot 5 + 24 \pmod{30} \equiv 29 \pmod{30}$, $\quad f = \left\lfloor \dfrac{29 + \left\lfloor \frac{5}{11} \right\rfloor}{29} \right\rfloor = 1$

$e \equiv 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot (29 - 1) + 5 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$.

Im Jahr 1981 wurde das Osterfest also gefeiert am

$$P = 22 + (29 - 1) + 0 = 50.\ \text{März} = 19.\ \text{April}.$$

Würde man hier die Korrektur f nicht berücksichtigen, wäre $e = 6$, $P = 22 + 29 + 6 = 57$. März = 26. April und Ostern wäre wieder eine Woche zu spät eingetreten.

8 Kalenderberechnungen in der Sekundarstufe I und II

Im letzten Kapitel werden Vorschläge und Ideen zur Kalenderberechnung für den Unterricht angeführt. Schülerinnen und Schüler werden schon in den ersten Schuljahren mit den Themen Kalender, Wochentage, Monate und Jahreszeiten konfrontiert. In den Schulbüchern für die Sekundarstufe kommt das Thema jedoch kaum vor, deshalb ist es als Lehrperson wichtig, sich mit den Schülerinnen und Schülern immer wieder damit auseinanderzusetzen. Die meisten Menschen kennen die Hintergründe und Zusammenhänge der Kalenderrhythmen nicht. Da hinter einem Kalender auch viele astronomische Größen stecken, wäre es zum Beispiel auch möglich, fächerübergreifend im Mathematik- und Physikunterricht zu arbeiten.

Im Folgenden werden einige Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer der Sekundarstufe I und II bzw. Unterstufe und Oberstufe, welche zum Thema Kalender im Mathematikunterricht gelehrt werden können, ausgearbeitet. Auf minutengenaue Stundenplanungen wird aber verzichtet, da die Umsetzung von der Lehrperson und der gegebenen Situation abhängt. Es gibt unter anderem auch viele Materialien und Veröffentlichungen zum Thema Kalender, welche sich mit der didaktischen und sachlichen Ebene auseinandersetzen. Das Buch „Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2“ von J. Maaß und H.-S. Siller, sei zu erwähnen, da einige Ideen und Beispiele für die Sekundarstufe I aus diesem Buch stammen (siehe [17]). Das Kapitel „Sonne, Mond und Sterne - Kalender und astronomische Größen in der Sekundarstufe I“ von Prof. Dr. Günter Graumann bietet eine gute Übersicht zum Thema Kalenderberechnungen.

8.1 Sekundarstufe I

Im Lehrplan der 1. bzw. 2. Klasse Unterstufe versteckt sich das Thema „Kalender“ im Zusammenhang mit der Vertiefung natürlicher Zahlen, Wiederholung der Größenbegriffe und Darstellung von Dezimalzahlen und Brüchen. In der Unterstufe, also in der Sekundarstufe I, wäre es zum Beispiel möglich, Grundlegendes Wissen zum Kalender mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam zu erarbeiten. Eine weitere Anwendung wäre die Berechnung von Kalenderrhythmen der verschiedenen Kalenderarten wie des Julianischen und Gregorianischen Kalenders.

8.1.1 Grundlagen zum Thema Kalender

In der Grundschule lernen die Kinder bereits die Monats- und Wochentagsnamen und deren Reihenfolge, die Datumsschreibweise, die Dauer von Monat und Woche, genauso wie die Anzahl der Tage, Wochen bzw. Monate zwischen zwei Daten (z.B. von heute bis zu Weihnachten). Auch die Jahreszeiten, Tageszeiten und die Uhr stehen am Lehrplan. Es wird auch besprochen, dass der Monat Februar alle vier Jahre einen Tag mehr hat. Doch was genau dahinter steckt und warum alle Bezeichnungen unseres Kalenders so sind, wird normalerweise in der Grundschule noch nicht bearbeitet. Es bietet sich an, diese Themen in der 1. oder 2. Klasse Unterstufe genauer zu erklären.

Da der Einsatz neuer Medien, wie zum Beispiel Computer oder Tablet, im Unterricht mittlerweile nicht mehr wegzudenken ist, könnte man hier die Gelegenheit nutzen und den Schülerinnen und Schülern im Computerraum die grundlegenden Informationen, sowie geschichtliche Aspekte zum Kalender, im Internet recherchieren zu lassen um ein Plakat erstellen zu können. Dazu wäre es hilfreich, eine Liste der gesuchten Begriffe bereitzustellen, damit kein Chaos ausbricht und die Schülerinnen und Schüler eine Richtlinie haben nach was gesucht werden soll. Für die Ausarbeitung würden sich folgende Fragen anbieten:

- Was ist ein Kalender im Allgemeinen und was bedeutet das Wort „Kalender“?
- Welche Kalenderarten gibt es? (z.B. Mondkalender, Sonnenkalender, Mond-Sonnen-Kalender)
- Welcher Kalender ist heute bei uns gültig und seit wann ist das so?
- Wie ist ein Jahr definiert und welche verschiedene Jahre gibt es? (z.B. Tropisches Jahr, Siderisches Jahr)
- Was ist ein Tag, ein Sonnentag und ein Sternentag?
- Wie ist ein Monat definiert und welche verschiedene Arten gibt es? (z.B. Synodischer Monat, Siderischer Monat)

Hier werden die Schülerinnen und Schüler herausfinden, dass zum Beispiel das tropisches Jahr etwa 365,2422 Tage bzw. 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 45 Sekunden lang ist. Sind die Dezimalzahlen noch nicht bekannt, sollte mit der Angabe in Tagen, Stunden, Minuten und Sekunden gerechnet werden. Wenn die Dezimalzahlen bereits bekannt sind, kann mit diesen gerechnet und durch Umrechnung überprüft werden. Als nächstes werden wir uns den Zyklen im Zusammenhang mit Kalendern widmen.

8.1.2 Kalenderrhythmen

Um Berechnungen von Kalenderrhythmen beim Julianischen und Gregorianischen Kalender durchführen zu können, muss man sich zuerst mit der Frage, warum es ein Schaltjahr gibt, beschäftigen. Die Schülerinnen und Schüler werden sich vermutlich selbst Fragen stellen wie „*Warum gibt es alle vier Jahre ein Schaltjahr und gilt das denn auch immer?*“

Da bereits bekannt ist, dass die Umlaufdauer der Erde um die Sonne etwa 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 45 Sekunden beträgt, lässt sich erkennen, dass ein Gemeinjahr mit 365 Tagen nicht ganz 6 Stunden kürzer ist als das tropische Jahr. Diese Differenz entspricht etwa einem Vierteltag. Nach zwei Jahren summiert sich der Fehler dann bereits zu einem halben Tag auf und nach vier Jahren fast zu einem ganzen Tag. Darum ist es vernünftig alle vier Jahre einen Schalttag einzufügen.

Das kann mit folgender Rechnung veranschaulicht werden: $4 \cdot (5\text{h} + 48\text{min} + 45\text{s}) = 23\text{h} + 15\text{min}$, wobei h für Stunde, min für Minute und s für Sekunde steht. Damit könnte man auch die Geschichte zum Julianischen Kalender besprechen, da Julius Cäsar 46. v. Chr. den Julianischen Kalender, der alle vier Jahre ein Schaltjahr besitzt, einführte. Sieht man aber noch genauer hin, dann stellt man fest, dass 23h + 15min nicht genau einem ganzen Tag entspechen, sondern 45 Minuten weniger. Also nach einem Schalttag beginnt das folgende Jahr um 45 Minuten zu spät, was pro Jahr 11min + 15s sind. Dies hört sich im ersten Moment nicht viel an, doch in einem Jahrhundert summiert sich der Fehler zu 18h + 45min auf, also etwa ein 3/4 Tag. Nach vielen Jahrhunderten ist der Fehler dann so groß, dass zum Beispiel der festgelegte Frühlingsanfang nicht mehr mit der Frühlings-Tag-und-Nachtgleiche zusammenfällt. Dies war einer der Gründe, warum Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 den Julianischen Kalender mit der Gregorianischen Kalenderreform ablöste. Die Kalenderreform beinhaltete zum Beispiel die Modifizierung der Schaltregel. In 400 Jahren lässt man nun 3 Schalttage ausfallen, da $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Die Schalttage wurden somit jeweils im vollen Jahrhundert ausgelassen, aber nicht alle 400 Jahre. Ein sogenanntes gregorianisches Jahr hat also $365 + \frac{1}{4}$ Tage $- (\frac{3}{4} : 100)$ Tage $= 365\text{d} + 5\text{h} + 49\text{min} + 12\text{s}$. Der Unterschied zum tropischen Jahr beträgt somit nur 27 Sekunden und es wurde ein Rhythmus gefunden, welcher das tropische Jahr gut annähert. Erst nach etwa 3300 Jahren summiert sich die Differenz zu einem kompletten Tag auf. Die genaue Anzahl der Jahre kann natürlich auch im Unterricht durchgerechnet werden. Weiters sollte man hier auch noch die Auslassung der 10 Tage bezüglich der gregorianischen Kalenderreform erwähnen.

Wann fällt ein bestimmtes Datum wie z.B. der Geburtstag wieder auf denselben Wochentag? Dies wäre eine weitere Frage, welche man den Schülerinnen und Schülern stellen könnte. Ein Jahr besteht aus 52 Wochen und 1 Tag oder 2 Tage, je nach dem ob es ein Schaltjahr ist oder nicht. Darum verschiebt sich der Wochentag eines bestimmten Datums im folgenden Jahr um entweder 1 oder 2 Tage. Zusätzlich muss noch berücksichtigt werden, ob das Ausgangsdatum in einem Schaltjahr vor oder nach dem Schalttag liegt.

Natürlich kann auch ein Zyklus für die Mondphasen ausgearbeitet werden und Berechnungen mit Mondkalendern, genauso wie mit anderen Kalendern (Islamische Kalender, jüdische Kalender, Maya-Kalender), durchgenommen werden. Auf diese wird hier aber nicht genauer eingegangen.

Wie man sieht, gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, das Thema Kalender im Mathematikunterricht in der Unterstufe den Kindern näher zu bringen, wobei hier hauptsächlich das Rechnen mit Dezimalzahlen und Brüchen und die Umwandlung von Stunden, Minuten, Sekunden in Dezimalzahlen bzw. umgekehrt, im Vordergrund steht.

8.2 Sekundarstufe II

Das Rechnen in Restklassen steht zwar nicht direkt im Lehrplan der Sekundarstufe II, doch in der 5. Klasse kann es im Bezug zum Thema Reflexion und Vertiefung von Zahlenmengen oder Arbeiten mit Teilern behandelt werden. Beim Rechnen in Restklassen können natürlich wieder Kalenderberechnungen als Anwendung bearbeitet werden.

8.2.1 Rechnen in Restklassen

Das Rechnen in Restklassen könnte in der 5. Klasse zum Beispiel anhand von Tabellen eingeführt werden. Es wird eine Tabelle vorgegeben, welche von den Schülerinnen und Schülern vervollständigt werden soll. Ein Beispiel dafür wären folgende Tabellen in Abbildung 8.1 für Restklassen modulo 3 und 7. Aus diesen Tabellen können dann Beobachtungen gemacht werden, wie zum Beispiel, dass jede Spalte aus den Zahlen die bei der Division von 3 bzw. 7 den selben Rest ergeben. Die möglichen Reste sind bei Division durch 3 entweder 0, 1 oder 2. Die Spalten heißen „Restklassen modulo 3“. Die Zahlen 4 und 16 stehen in der selben Spalte und gehören deshalb auch zu der selben Restklasse modulo 3. Man schreibt $4 \equiv 16 \pmod 3$ und spricht „4 ist kongruent 16 modulo 3“. $127 \equiv 1 \pmod 3$ bedeutet also, dass 127 dividiert durch 3 den Rest 1 ergibt und $147 \equiv 0 \pmod 7$, dass 174 durch 7 ohne Rest teilbar ist. Eine weitere Eigenschaft lässt sich aus den Tabellen beobachten, nämlich dass die Differenz zweier Zahlen der selben Spalte ist immer ein Vielfaches von 3 bzw. 7. Als nächstes kann die allgemeine Definition einer Kongruenz eingeführt werden.

...	...	...
9		
6		
3	4	5
0	1	2
-3	-2	-1
...	...	...

...	...	...	...	...	...	...
14	15					
7	8	9	10			
0	1	2	3	4	5	6
-7	-6	-5	- 4			
...	...	...	...	...	...	...

Abbildung 8.1: Tabellen zum Vervollständigen von Restklassen modulo 3 und 7

Als Übungsaufgaben bieten sich Kalenderberechnungen an. Ein Beispiel dafür wäre die Berechnung von Wochentagen.

Beispiel 8.1. Heute ist Donnerstag der 23.02.2017. Welcher Wochentag ist dann am 24.06.2017? Zuerst müssen wir berechnen, wie viele Tage bis zum 24.06.2017 vergehen. Der Februar hat noch 5 Tage, der März hat 31 Tage, April 30 Tage, Mai 31 Tage und der Juni zählt 24 Tage. Gesamt ergibt das 121 Tage. Wir wissen, nach jeweils 7 Tagen ist wieder Donnerstag, darum interessiert uns der Rest bei Division durch 7, also $121 \equiv 2 \pmod 7$. Zählt man also 2 Tage weiter, dann ist der 24.06.2017 ein Samstag. Man könnte auch 5 Tage rückwärts zählen, da $121 \equiv -5 \pmod 7$. Man könnte auch die einzelnen Reste der Monate addieren und aus dieser Summe den Rest bestimmen.

„Der 01.01.2017 war ein Sonntag, welcher Wochentag ist am 01.01.2020?“ oder „An welchem Tag findet dein nächster Geburtstag statt?“, wären weitere Beispiele zum Üben.

Beherrschen die Schülerinnen und Schüler das Rechnen in Restklassen, kann die Berechnung der Ostersonntage mit Hilfe der Gauß’schen Osterformel, besprochen werden. Dies würde sich natürlich perfekt für eine Osterstunde, also die Unterrichtseinheit vor den Osterferien, anbieten. Zuerst sollte man aber den Schülerinnen und Schülern erklären, dass Ostern nach einer bestimmten Regel festgelegt wurde und welche Geschichte dahinter steckt. Nachdem Berechnungen per Hand durchgeführt wurden, kann mit einem Computer oder Tablet, sofern welche vorhanden sind, anhand eines GeoGebra Applets (siehe Abbildung 8.2) das Datum berechnet werden. Das Applet wurde mit GeoGebra 5.0.321.0-3D erstellt und ist unter diesem Link „www.geogebra.org/m/DmHTASDQ“ abrufbar.

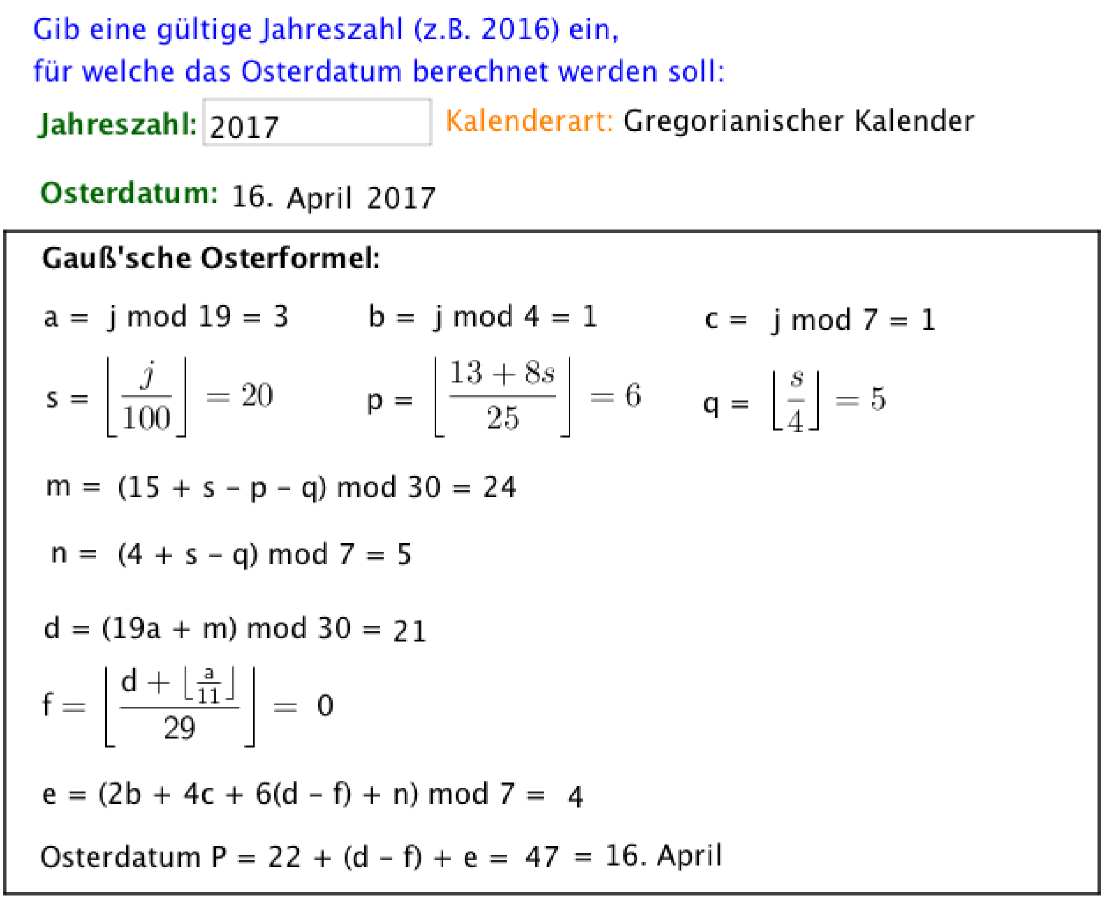

Abbildung 8.2: GeoGebra Applet zur Bestimmung des Osterdatums mit der Gauß'schen Osterformel

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] N. A. Bär. (2001 - 2006). Inter gravissimas. Adresse: `http://www.nabkal.de/intergravissimas.html`, abgerufen am 11.04.2017.

[2] D. Steinmetz, *Die Gregorianische Kalenderreform von 1582 - Korrektur der christlichen Zeitrechnung in der Frühen Neuzeit.* Verlag Dirk Steinmetz, 2011.

[3] J. Herrmann, *Dtv-Atlas zur Astronomie - Tafeln und Texte*, 4. Auflage. Deutscher Taschenbuch Verlag, 1977.

[4] B. Henne und S. Kiehlmann. (2011). Astronomie und astrophysik. Adresse: `https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6855`, abgerufen am 14.02.2017.

[5] Seite: Gaius Iulius Caesar. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 23. Februar 2017, 00:49 UTC. Adresse: `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaius_Iulius_Caesar&oldid=162919682`, abgerufen am 09.04.2017.

[6] W. Görke, *Datum und Kalender - Von der Antike bis zur Gegenwart.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[7] Seite: Gregor XIII. In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 12. November 2016, 00:36 UTC. Adresse: `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gregor_XIII.&oldid=159607030`, abgerufen am 09.04.2017.

[8] Y. Nesterenko und E. Nikishin, *Internationale Mathematische Nachrichten - Kettenbrüche*, 192. Österreichische Mathmatische Gesellschaft, Wien, 2003, S. 22 –39.

[9] F. Pillichshammer, *Eine Einführung in die Zahlentheorie, Vorlesungsskript.* JKU Linz, Institut für Finanzmathematik, 2010.

[10] K. Reiss und G. Schmieder, *Basiswissen Zahlentheorie - Eine Einführung in Zahlen und Zahlenbereiche*, 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[11] P. Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, 6. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[12] H. Scheid und W. Schwarz, *Elemente der Arithmetik und Algebra*, Ser. 6. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

[13] F. L. Bauer, *Historische Notizen zur Informatik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[14] G. H. Hardy und E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th. Oxford at the Clarendon Press, 1979.

[15] D. H. Kinkelin, *Zeitschrift für Mathematik und Physik - Die Berechnung des christlichen Osterfestes*. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1870, Bd. 15, S. 217 –228.

[16] N. A. Bär. (2001 - 2008). Statistik der osterdaten. Adresse: `http://www.nabkal.de/osterstatistik.html`, abgerufen am 09.04.2017.

[17] J. Maaß und H.-S. Siller, *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014.